

第八章 气体分子运动论

§1. 引言

在第二章及其后的两章中我们从宏观的角度研究了流体动力学。在那里，我们考察的对象不是流体个别分子的微观性质，而是由大量分子组成的流体微团的宏观性质。然而，流体的宏观运动状态本质上应该是由流体分子的微观运动状态所决定的，只有从微观这一个更深的层次观察问题，才能进一步看清问题的本质。

在本章中，我们将从分子的微观现象出发，阐明气体的输运过程。这不仅是研究稀薄气体动力学的重要基础，并在此基础上，可将气体动力学的宏观现象作为一种特殊的极限情况来加以处理，由此并可以看出各种近似的有效范围。这也自然地给出了如何决定粘性系数、导热系数以及状态方程的方法。

下面，先作一些一般性的描述。

已知在常温常压下，宏观的气体样品中包含大量的分子。例如，在标准状况下，即压强 $p = 1$ 气压（约合 1.013×10^5 帕），温度 $T = 273\text{K}$ （即 0°C ）时，一立方厘米空气中的分子数为

$$n \approx 2.69 \times 10^{19}.$$

这一庞大的数字启示我们，对气体个别分子作详细的动力学描述，不仅没有可能，而且没有必要。从实用的观点看，对大量单个分子的运动作平均，采用统计描述应该是合理的。

在标准状况下，空气中分子间的平均距离是

$$r_0 \approx \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \approx 3 \times 10^{-7} (\text{厘米}).$$

这和分子尺寸 (近似等于 0.53×10^{-8} 厘米) 相比要大得多。因此，除碰撞外，气体分子间的相互作用力可以忽略不计，而且分子间发生碰撞的可能性也比较小，可以忽略三个或三个以上分子同时发生碰撞的可能性，而只从分子间成对发生相互作用的角度来考虑分子碰撞的效应。

一般说来，研究微观粒子的运动和碰撞要利用量子力学 (参见第十章)，但实际上，对于气体动力学中的许多应用问题，用经典力学已经是足够了。本章就利用经典力学的办法，确定每次碰撞的分子轨道，作出分子的输运方程，并由此求得热力学及流体动力学的一些基本关系式。

§2. 玻尔兹曼 (Boltzmann) 方程

2.1. 分布函数

假定只存在一种分子，对任一时刻 t ，可由其位置 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 及速度 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 来描述一个分子的状态。为了描述分子的分布状况，引入分布函数

$$f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}),$$

其意义如下：在时刻 t ，位置落在 \mathbf{x} 附近的一个微元体积 $d\mathbf{x}$ 中，而速度在 \mathbf{v} 附近的一个微元体积 $d\mathbf{v}$ 中的分子的平均数目是

$$dN = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \quad (2.1)$$

其中 $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$ 及 $d\mathbf{v} = dv_1 dv_2 dv_3$ 。于是， f 是在时刻 t ，在 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 处单位体积及单位速度变化范围中的分子数。这

是一个密度分布函数. 这里, “平均”意味着通过对许多相同的测量分子分布的实验结果取平均来给出函数 f .

若分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 为已知, 就可以由它决定出许多宏观的量. 例如, 在给定体积 V 中的分子总数为

$$N = \int_V d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (2.2)$$

再由 f 的定义, t 时刻在 \mathbf{x} 处单位体积内的分子总数为

$$n(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (2.3)$$

于是, 所考察的气体在 t 时刻、 \mathbf{x} 处的密度为

$$\rho(t, \mathbf{x}) = nM = M \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (2.4)$$

其中 M 为分子的质量; 而在 t 时刻、 \mathbf{x} 处的平均速度 $\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = (V_1, V_2, V_3)$ 则由

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

来决定.

此外, 在气体分子论中, 在 t 时刻、 \mathbf{x} 处的温度 $T(t, \mathbf{x})$ 由

$$\frac{3}{2}nkT(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}M|\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (2.6)$$

决定, 其中 n 及 \mathbf{V} 分别由 (2.3) 及 (2.5) 式给出, M 为分子的质量, 而

$$k = 1.380 \times 10^{-16} \text{ 尔格 / 度}$$

是玻尔兹曼常数. 下面将会看到, 对于处于热力学平衡态的理想气体, (2.6) 式就化为通常的温度的定义; 而即使对于非平衡态的气体, 也由 (2.6) 式给出温度的定义.

(2.6) 式的右边表示每单位体积的热能. 事实上, $\mathbf{v} - \mathbf{V}$ 是扣除了宏观速度后的分子运动速度, $\frac{1}{2}M|\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2$ 为单个分子的动能, 而 $f d\mathbf{v}$ 为对每单位体积、速度在微元体积 $d\mathbf{v}$ 中的分子数. 因此, (2.6) 式右端为单位体积中分子热运动的能量, 它是温度的函数. 这隐含着所论的气体为理想气体.

至于在时刻 t 、 \mathbf{x} 处的压力张量则定义为

$$p_{ij}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} M(v_i - V_i)(v_j - V_j)f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})d\mathbf{v} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.7)$$

以后将看到, 它与我们在第二章 §2 中定义的应力张量相差一个负号.

在很多我们感兴趣的情况, f 关于变量 $\mathbf{v} - \mathbf{V}$ 基本上是对称的, 因为坐标的取向对 f 几乎没有什么影响, 在将 \mathbf{v} 减去平均速度 \mathbf{V} 后, 就不再有优势的方向. 特别, 当 f 只是 $|\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2$ 的函数时, 注意到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} u_i u_j f(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) du &= 0, \quad \text{若 } i \neq j, \\ \int_{\mathbb{R}^3} u_1^2 f(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) du &= \int_{\mathbb{R}^3} u_2^2 f(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u_3^2 f(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) du, \end{aligned}$$

易知

$$p_{ij}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{若 } i \neq j, \\ p(t, \mathbf{x}), & \text{若 } i = j, \end{cases} \quad (2.8)$$

且注意到 (2.6) 式, 有

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 p_{ii} = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} M |\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ &= nkT(t, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

这正好相应于理想气体的情形. 这也说明, 上述讨论的适用范围是理想气体.

最后, 在 t 时刻、 \mathbf{x} 处单位体积的总能量是

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2} |\mathbf{v}|^2 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2} (|\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2 + 2(\mathbf{v} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} + |\mathbf{V}|^2) f d\mathbf{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2} |\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2 f d\mathbf{v} + \int_{\mathbb{R}^3} M(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}) f d\mathbf{v} \\ &\quad - \frac{M}{2} |\mathbf{V}|^2 \int_{\mathbb{R}^3} f d\mathbf{v} \\ &= \frac{3}{2} nkT + nM |\mathbf{V}|^2 - \frac{1}{2} nM |\mathbf{V}|^2 \\ &= \frac{3}{2} nkT + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

这里我们利用了 (2.6)、(2.5) 及 (2.3) - (2.4) 式. 总能量是内能和宏观动能之和. 注意到 $\frac{3}{2} nkT = \frac{3}{2} \frac{kT}{M} \rho$, 单位质量的内能为

$$e = \frac{3}{2} \frac{kT}{M}. \quad (2.11)$$

2.2. 玻尔兹曼方程

为了决定分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, 并论述关于气体非平衡性质的普遍理论, 我们要建立 f 满足的方程——玻尔兹曼方程. 这是分子数守恒定律在数学上的描述.

为了得到这个方程, 考察时刻 t 处于 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 状态的分子的运动. 设作用在分子上的外力为 $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ (往往可假设它与 \mathbf{v} 无关, 因为外力通常是宏观作用的). 于是作用在单个分子每单位质量上的作用力为

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{M}. \quad (2.12)$$

在一个时间间隔 dt 中, 设分子间不发生碰撞, 于是原先在 t 时刻处于 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 的分子, 在 $t + dt$ 时刻就将处于 $(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$, 其中

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \mathbf{v}dt, \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} + \mathbf{g}dt. \end{aligned} \quad (2.13)$$

相应地, 在 t 时刻处于 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 的体积微元 $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ 内的所有分子, 在 $t + dt$ 时刻就会由于运动而处于 $(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ 的体积微元 $d\mathbf{x}'d\mathbf{v}'$ 中. 注意到

$$d\mathbf{x}'d\mathbf{v}' = \left| \det \frac{\partial(\mathbf{x}', \mathbf{v}')}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{v})} \right| d\mathbf{x}d\mathbf{v},$$

而变换 (2.13) 的雅可比行列式 $\det \frac{\partial(\mathbf{x}', \mathbf{v}')}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{v})}$ 为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dt \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}dt & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}dt & \frac{\partial g_1}{\partial x_3}dt & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}dt & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}dt & \frac{\partial g_2}{\partial x_3}dt & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1}dt & \frac{\partial g_3}{\partial x_2}dt & \frac{\partial g_3}{\partial x_3}dt & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + O(dt^2).$$

不计在今后讨论中不起作用的高阶小量, 就有

$$dx'dv' = dx dv, \quad (2.14)$$

于是, 在 t 时刻、在 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 处的体积微元 $dx dv$ 中的分子数为

$$dN = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) dx dv, \quad (2.15)$$

而在 $t + dt$ 时刻、在 $(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ 处的相应体积微元中的分子数则为

$$dN' = f(t + dt, \mathbf{x}', \mathbf{v}') dx dv. \quad (2.16)$$

如果分子间不发生相互作用 (碰撞), 那么 t 时刻在 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 处的体积微元内的所有分子, 在 $t + dt$ 时刻都会运动到 $(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ 处的相应体积微元之内, 从而有

$$dN = dN'. \quad (2.17)$$

但实际上, 由于有分子间的相互作用 (碰撞), 一方面有些原先不在 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 处的体积微元 $dx dv$ 内的分子会散射到 $(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ 处的相应体积微元内; 另一方面, 原先在 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 处的体积微元 $dx dv$ 内的有些分子也会散射到 $(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ 处的相应体积微元之外. 于是, (2.17) 式一般并不成立, 而应代之以

$$dN' - dN = J dt dx dv, \quad (2.18)$$

上式右端表示由于散射而引起的粒子在体积微元内的净增益, 它应和 dx , dv 及 dt 成正比, 故有上述形式, 而 J 将在下文中决定.

由 (2.15)—(2.16) 及 (2.13) 式, 不计高阶小量, 就有

$$\begin{aligned} dN' - dN &= f(t + dt, \mathbf{x}', \mathbf{v}') dx dv - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) dx dv \\ &= (f(t + dt, \mathbf{x} + \mathbf{v} dt, \mathbf{v} + \mathbf{g} dt) - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) dx dv \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{g} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f \right) dx dv dt, \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中记

$$\nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

及

$$\nabla_v = \left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}, \frac{\partial}{\partial v_3} \right).$$

由 (2.18) 和 (2.19) 式, 就得到 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 应满足的偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + \mathbf{g} \cdot \nabla_v f = J. \quad (2.20)$$

它称为玻尔兹曼方程.

在上述方程中, 可将其右端 J 写为

$$J = J_+ - J_-. \quad (2.21)$$

其中 J_+ 与 J_- 的意义如下: $J_- dt d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ 表示在时间间隔 $[t, t + dt]$ 中因为碰撞而离开原先考察的体积微元 $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ 的分子总数, 即具有下述性质的碰撞的次数, 其中两个碰撞分子中有一个开始在 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 处的体积微元 $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ 中; 而 $J_+ dt d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ 表示在时间间隔 $[t, t + dt]$ 中因为碰撞而进入原先考察的体积微元 $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ 的分子总数, 即具有下述性质的碰撞的次数, 其中两个碰撞分子碰撞后有一个落在 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 处的体积微元 $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ 中. 这样, J 就是在 $[t, t + dt]$ 时间内粒子在 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 处的体积微元 $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ 中的净增益数. J 称为碰撞项.

为了决定 J_+ 及 J_- , 必须先具体地研究碰撞的性质.

2.3. 二体碰撞

我们考察两个具有相等质量且无内部结构的分子在自由空间中的弹性碰撞. 每个分子的状态由其位置及速度来描述.

设两分子碰撞前的速度分别为 \boldsymbol{v} 及 \boldsymbol{w} , 而碰撞后的速度分别为 \boldsymbol{v}' 及 \boldsymbol{w}' . 由动量及能量守恒定律, 有

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}' \quad (2.22)$$

及

$$|\boldsymbol{v}|^2 + |\boldsymbol{w}|^2 = |\boldsymbol{v}'|^2 + |\boldsymbol{w}'|^2. \quad (2.23)$$

令

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}), \quad \bar{\boldsymbol{v}}' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}')$$

及

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{w}' - \boldsymbol{v}',$$

(2.22)—(2.23) 式可改写为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{v}}', \quad (2.24)$$

$$|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}'|. \quad (2.25)$$

事实上, (2.22) 与 (2.24) 是完全等价的. 又由 (2.22) 式, 有

$$|\boldsymbol{v}|^2 + 2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} + |\boldsymbol{w}|^2 = |\boldsymbol{v}'|^2 + 2\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{w}' + |\boldsymbol{w}'|^2.$$

注意到 (2.23) 式, 上式给出

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{w}'.$$

从而

$$|\boldsymbol{v}|^2 - 2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} + |\boldsymbol{w}|^2 = |\boldsymbol{v}'|^2 - 2\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{w}' + |\boldsymbol{w}'|^2,$$

这就是 (2.25) 式. 反过来的推导也是显然的.

由 (2.24)—(2.25) 式可以看到: 弹性碰撞不改变平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}' = \bar{\boldsymbol{v}}$; 而 \boldsymbol{u}' 仅为 \boldsymbol{u} 的一个旋转, 其大小不变. 于是, 给定 $\bar{\boldsymbol{v}}$,

\mathbf{u} 以及 \mathbf{u}' 对 \mathbf{u} 的旋转角 (θ, ϕ) 就完全决定了碰撞 (见图 1). 角 θ 及 ϕ 称为 散射角.

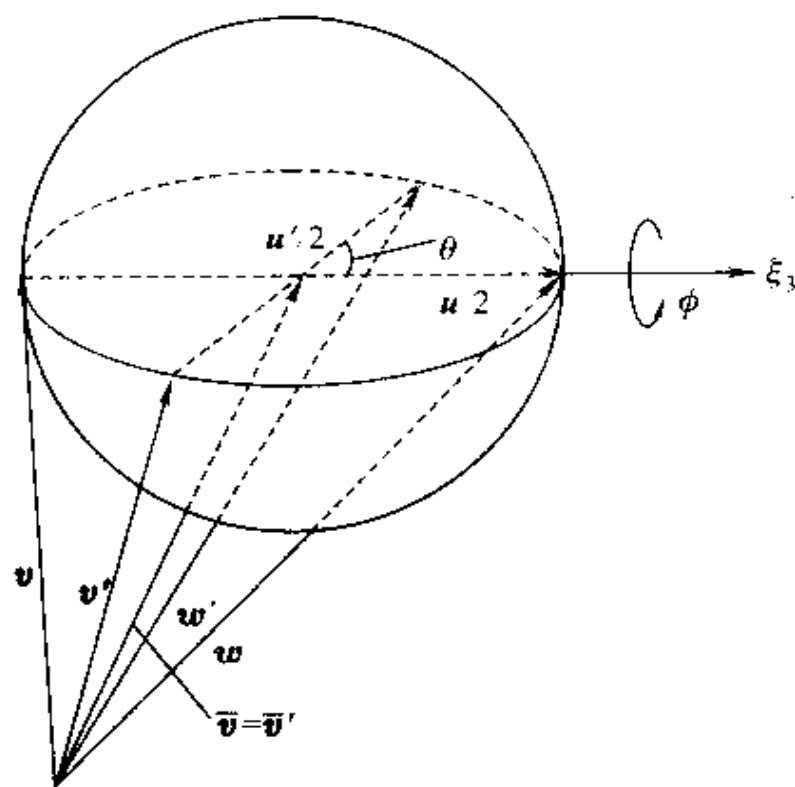


图 1

若 $\bar{\mathbf{v}}$ 及 \mathbf{u} 分别在其附近的微元 $d\bar{\mathbf{v}}$ 及 $d\mathbf{u}$ 中变动, 而散射角 θ 及 ϕ 保持不变, 则碰撞后的量 $\bar{\mathbf{v}}'$ 及 \mathbf{u}' 也将在其相应的微元 $d\bar{\mathbf{v}}'$ 及 $d\mathbf{u}'$ 中变动. 由于 $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}'$, 故 $d\bar{\mathbf{v}} = d\bar{\mathbf{v}}'$. 再由于 θ, ϕ 保持不变, 又有 $|d\mathbf{u}| = |d\mathbf{u}'|$. 这样, 就有

$$d\bar{\mathbf{v}}d\mathbf{u} = d\bar{\mathbf{v}}'d\mathbf{u}'. \quad (2.26)$$

此外, 利用 $\bar{\mathbf{v}}$ 及 \mathbf{u} 的定义, 通过直接计算易知

$$d\bar{\mathbf{v}}d\mathbf{u} = d\mathbf{v}d\mathbf{w}. \quad (2.27)$$

类似地, 有

$$d\bar{\mathbf{v}}'d\mathbf{u}' = d\mathbf{v}'d\mathbf{w}'. \quad (2.28)$$

因此，若稍许改变 v 及 w ，但保持散射角不变，那么 v' 及 w' 将也作稍许的改变，且成立

$$dv dw = dv' dw'. \quad (2.29)$$

这儿，平均速度 \bar{v} 并不是一个特别重要的量。事实上，在一个以均匀速度 \bar{v} 平移的新坐标系下，仅需考虑相对速度 u 及 u' 。这一坐标系称为质心坐标系。

碰撞过程在实验室坐标系（即观察者所处的坐标系）及质心坐标系中的表示可分别见图 2 及图 3。

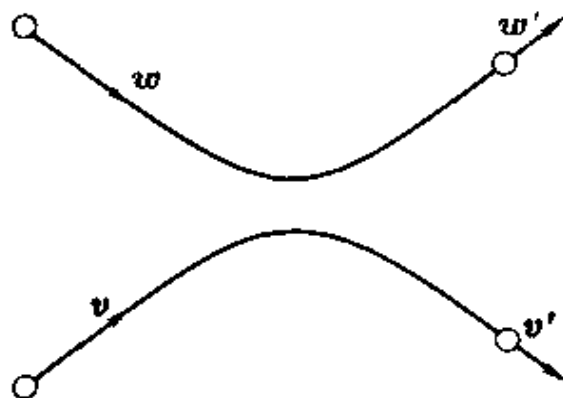


图 2

在质心坐标系下，仅需集中精力考虑一个碰撞分子，因为另一个和它碰撞的分子与其有相反的速度。这样，问题就等价地化为一个分子对一个假想的固定力心 O 的散射问题。一个分子以速度 u 迫近 O 点（见图 4），其入射轨道与 O 点的垂直距离 b 称为碰撞参数。取 O 点为坐标原点，并取 ξ_3 轴与 u 的方向平行。因为 $|u| = |u'|$ ，该分子最后的状态由两个散射角 θ 和 ϕ 决定。其中 θ 为 u' 与 ξ_3 轴的夹角，而 ϕ 为 u' 关于 ξ_3 轴的方位

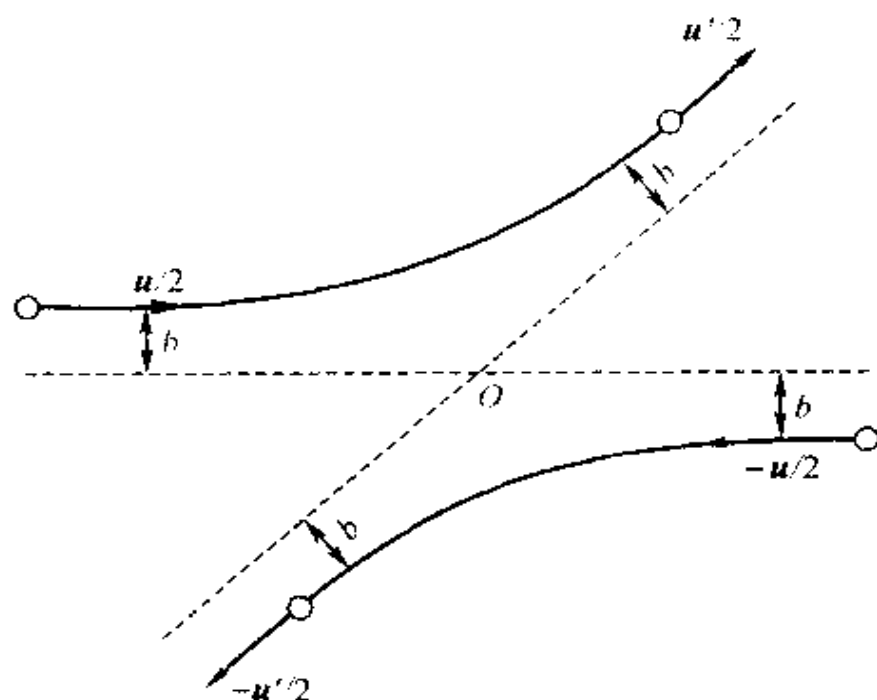


图 3

角. 下面将 θ 与 ϕ 一起记为 Ω .

下面引入微分散射截面 $\sigma(\Omega)$ 这一重要的概念.

我们看到, 碰撞的初始速度 v 及 w 并不能唯一决定碰撞, 因为它们不能决定碰撞参数 b . 给定 v 及 w , 由于 $\bar{v} = \frac{1}{2}(v + w)$ 给定, 相当于给定了一类碰撞, 它们具有同样的质心系. 这一类碰撞由相应于所有可能的碰撞参数 (因而所有可能的散射角) 的碰撞所组成. 为了描绘这一类碰撞, 可想像一均匀分布在空间、且具初始速度 u 的分子射束入射到力心 O 上, 见图 4.

设 I 为单位时间 (秒) 内通过垂直于射束的单位面积的入射束中的分子数, 称为入射流. 微分散射截面 $\sigma(\Omega)$ 就由下式定义:

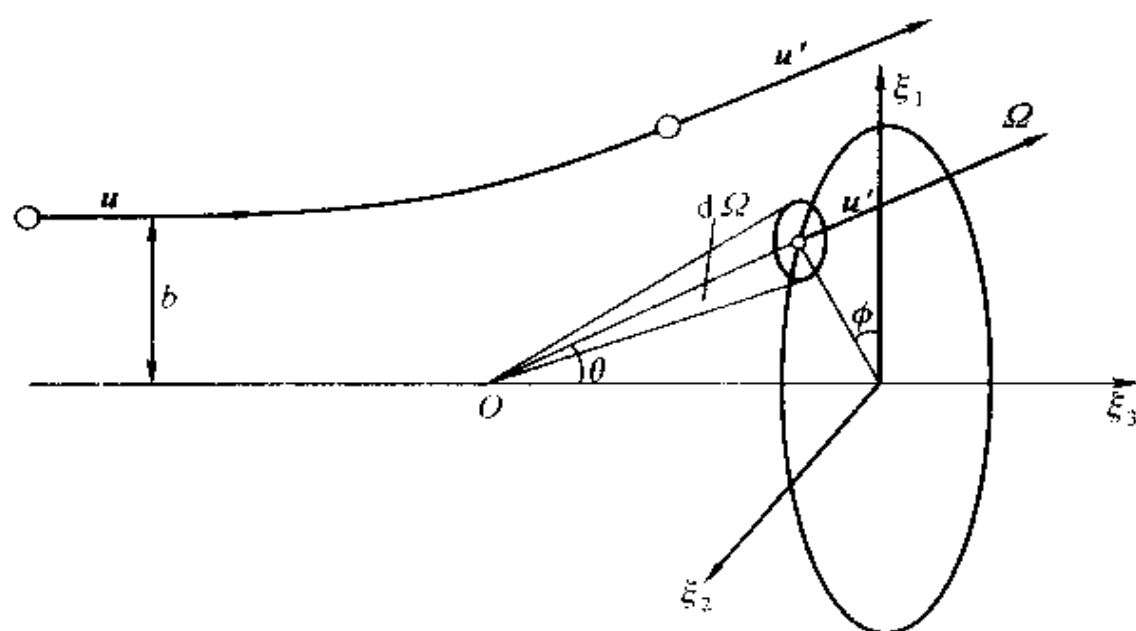


图 4

$$I\sigma(\Omega)d\Omega = \text{单位时间内由于散射而偏转到围绕 } \Omega \text{ 的立体角 } d\Omega \text{ 中的分子数.} \quad (2.30)$$

微分散射截面 $\sigma(\Omega)$ 有面积的量纲，其几何意义如下：

$$\begin{aligned} & \text{单位时间内散射偏转到 } [\Omega, \Omega + d\Omega] \text{ 中的分子数} \\ &= \text{单位时间内入射束越过垂直于射束面积 } \sigma(\Omega)d\Omega \text{ 的分子数.} \end{aligned}$$

$\sigma(\Omega)$ 对所有立体角元素的积分

$$\sigma_{tot} = \int \sigma(\Omega)d\Omega \quad (2.31)$$

称为总截面. 这里, 无论是 $\sigma(\Omega)$ 还是 σ_{tot} 均应理解为与 $|u|$ 有关.

微分散射截面是一个可以直接通过实验测量的量. 若内部分子势为已知, $\sigma(\Omega)$ 也可以通过计算的方法得到, 但必须利用量子力学的方法. 这是因为在碰撞过程中, 分子之间要重叠, 已不能用经典力学的办法处理. 这里, 我们假设对所考虑的气体, $\sigma(\Omega)$ 已给定.

现在记

$$\sigma(\Omega) = \sigma(v, w \rightarrow v', w'),$$

其中 v 及 w 为分子碰撞前的速度, v' 及 w' 为碰撞后的速度, 而 Ω 则为 $w - v$ 与 $w' - v'$ 之间的夹角及方位角.

$\sigma(\Omega)$ 有如下的对称性质.

(a) 对时间反演的不变性:

$$\sigma(v, w \rightarrow v', w') = \sigma(-v', -w' \rightarrow -v, -w). \quad (2.32)$$

这表示若将时间反演, 每个分子将按它原先的路程返回.

(b) 对旋转及反射的不变性:

$$\sigma(v, w \rightarrow v', w') = \sigma(v^*, w^* \rightarrow v'^*, w'^*), \quad (2.33)$$

其中 v^* 等表示由 v 等分别经过同一个旋转或镜面反射而得的向量.

给定一个碰撞, 可以定义它的反碰撞. 它由将原先碰撞的初始状态及结束状态互换而构成. 作为上述对称性的一个推论, 可以证明: 反碰撞与原碰撞具有同样的微分散射截面, 即成立

$$\sigma(v, w \rightarrow v', w') = \sigma(v', w' \rightarrow v, w). \quad (2.34)$$

事实上, 考虑如图 5 a) 所示的一个碰撞. 由性质 (a), 时间反演后微分散射截面不变, 于是就有

$$\sigma(v, w \rightarrow v', w') = \sigma(-v', -w' \rightarrow -v, -w).$$

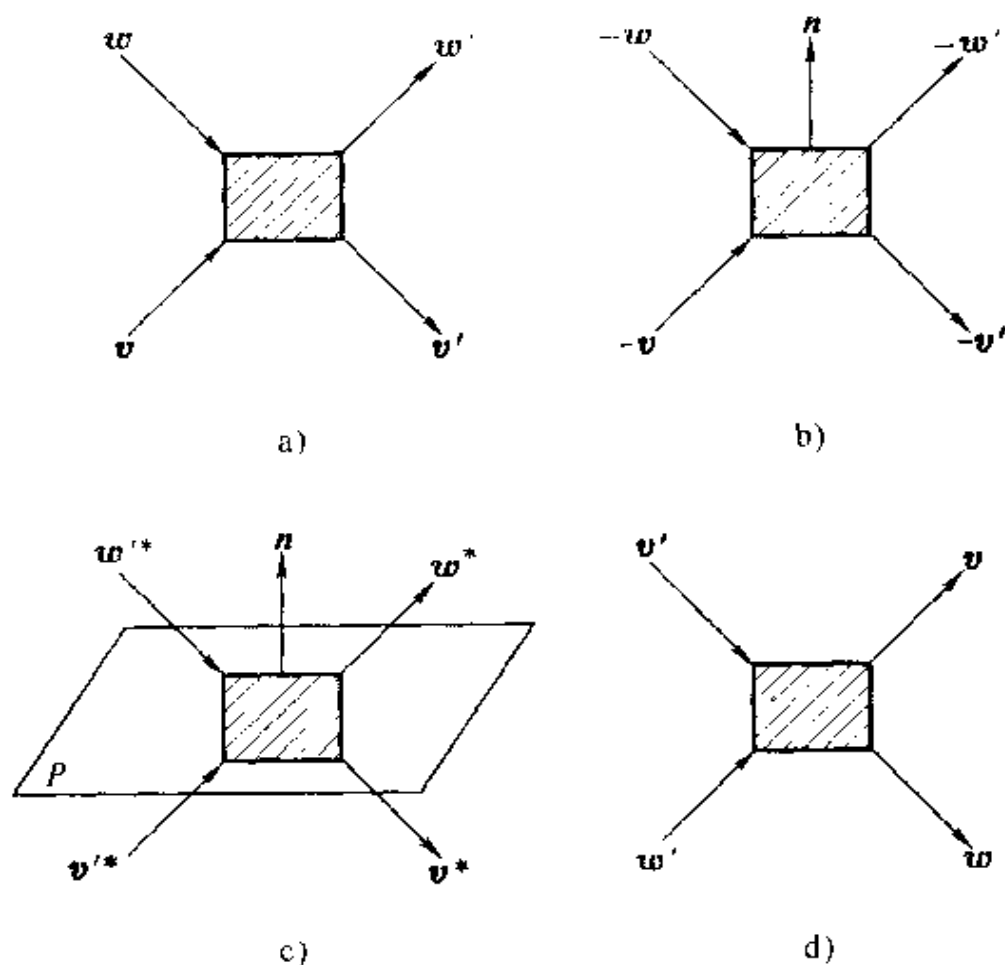


图 5

见图 5 b). 取一适当的轴向 n , 使它垂直于 $\bar{v} = \bar{v}'$, 然后将图 5 b) 绕 n 旋转 π 角. 由性质 (b), 微分散射截面仍保持不变, 即成立

$$\sigma(-v', -w' \rightarrow -v, -w) = \sigma(v'^*, w'^* \rightarrow v^*, w^*).$$

这里 v^* 等是 $-v$ 等分别经过上述旋转所得的向量, 见图 5 c). 再将图 5 c) 关于垂直于 n 的平面 P 作一反射, 易见此时 v^* 及 v'^* 等分别相应地变为 v 及 v' 等, 见图 5 d). 由性质 (b), 微分散射截面仍不变, 就有

$$\sigma(v'^*, w'^* \rightarrow v^*, w^*) = \sigma(v', w' \rightarrow v, w).$$

这就证明了 (2.34) 式.

上述推导的关键在于: 任何一个向量 \boldsymbol{v} 先绕轴 \boldsymbol{n} 旋转 π 角, 然后对垂直于 \boldsymbol{n} 的平面作反射, 就变为 $-\boldsymbol{v}$. 再加一个时间反演, 就回到 \boldsymbol{v} . 当然, 此时该向量在图中的位置已发生了变化 (比较图 5 a) 及 d)).

2.4. 碰撞项 J 的决定

现在讨论如何决定玻尔兹曼方程 (2.20) 右端的碰撞项 J . 为此目的, 假设

- (a) 只需考虑两个分子间的碰撞, 即设气体是相当稀薄的;
- (b) 不考虑气体容器的壁面, 因这只对边界条件有影响;
- (c) 不计外力对碰撞截面的影响;

(d) 各分子的运动状态 (其速度与位置), 在不发生碰撞时是互不关联的, 也就是说各分子的概率分布是相互独立的. 这称为分子混沌性假设. 它表示在 \boldsymbol{x} 处的空间体积微元 $d\boldsymbol{x}$ 与在 \boldsymbol{y} 处的空间体积微元 $d\boldsymbol{y}$ 中, 速度分别落在 \boldsymbol{v} 附近的微元 $d\boldsymbol{v}$ 及 \boldsymbol{w} 附近的微元 $d\boldsymbol{w}$ 中的分子对的数目为

$$(f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v})(f(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w})d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{w}). \quad (2.35)$$

现在来决定 (2.21) 式中的 J_- . 由前述, J_- 表示单位时间内、在单位体积元及单位速度元中由于碰撞而减少的分子数. 考察位置在 \boldsymbol{x} 附近一微元 $d\boldsymbol{x}$, 而速度在 \boldsymbol{v} 附近一微元 $d\boldsymbol{v}$ 中的分子. 在同一体积微元 $d\boldsymbol{x}$ 中, 在任何速度 \boldsymbol{w} 附近的速度微元 $d\boldsymbol{w}$ 中的分子均可视为作用在速度为 \boldsymbol{v} 的分子上的入射分子束. 注意到将靶心固定, 入射分子束的相对速度为 $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}$, 易知此分子束的入射流

$$\begin{aligned} I &= \text{单位时间内通过垂直于 } \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v} \text{ 的单位面积上的入射} \\ &\quad \text{分子束中速度在 } \boldsymbol{w} \text{ 附近的微元 } d\boldsymbol{w} \text{ 中的分子数} \\ &= f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})d\boldsymbol{w}|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}|. \end{aligned} \quad (2.36)$$

于是, 由 (2.30) 式, 在时间区间 $[t, t+dt]$ 内发生的碰撞 $\{\mathbf{v}, \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$ 散射到围绕 Ω 的立体角 $d\Omega$ 中的分子数为

$$I\sigma(\Omega)d\Omega dt = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{w})d\mathbf{w}|\mathbf{w} - \mathbf{v}|\sigma(\Omega)d\Omega dt, \quad (2.37)$$

其中 $\sigma(\Omega) = \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{v}', \mathbf{w}')$ 为在质心坐标系下的微分散射截面, 而 Ω 为 $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ 与 $\mathbf{w}' - \mathbf{v}'$ 之间的夹角与方位角.

将 (2.37) 式关于 \mathbf{w} 与 Ω 积分, 就得到在时间区间 $[t, t+dt]$ 中与一个速度为 \mathbf{v} 的分子碰撞的分子数为

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| f(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) dt. \quad (2.38)$$

再考虑到在 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 附近的微元 $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ 中的分子数为

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})d\mathbf{x}d\mathbf{v}, \quad (2.39)$$

由分子混沌性假设 (见 (2.35) 式), 即得在时间区间 $[t, t+dt]$ 内, 在 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 附近的微元 $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ 中由于碰撞而离开原先微元的分子数为

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\mathbf{x}d\mathbf{v}dt. \quad (2.40)$$

这样就得到

$$J_- = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}), \quad (2.41)$$

其中积分是关于 \mathbf{w} 及散射角 Ω 进行的.

虽然上式右端关于 Ω 的积分可以直接写成总截面的形式:

$$\int \sigma(\Omega) d\Omega = \sigma_{tot}, \quad (2.42)$$

但为下文讨论的方便, 仍采用 (2.41) 式那样看起来较为复杂的形式.

现在来决定 (2.21) 式中的 J_+ . 考察形如 $\{\mathbf{v}', \mathbf{w}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ 的碰撞, 其中 \mathbf{v} 为固定, 即是我们所考察的分子速度. 对一个速度为 \mathbf{v}' 的分子, 它经受速度为 \mathbf{w}' 的分子束的入射, 其入射流为

$$I = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}') d\mathbf{w}' |\mathbf{w}' - \mathbf{v}'| \quad (2.43)$$

(参见 (2.36) 式). 因此, 在时间区间 $[t, t + dt]$ 中, 因此类碰撞而散射到围绕 Ω 的立体角 $d\Omega$ 中的分子数为

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}') d\mathbf{w}' |\mathbf{w}' - \mathbf{v}'| \sigma'(\Omega) d\Omega dt, \quad (2.44)$$

其中

$$\sigma'(\Omega) = \sigma(\mathbf{v}', \mathbf{w}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (2.45)$$

将 (2.44) 式关于 \mathbf{w}' 及 Ω 积分, 即得在时间区间 $[t, t + dt]$ 内, 与速度为 \mathbf{v}' 的分子碰撞的分子总数为

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w}' \int d\Omega \sigma'(\Omega) |\mathbf{w}' - \mathbf{v}'| f(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}') dt. \quad (2.46)$$

考虑到在 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}')$ 附近的微元 $d\mathbf{x}d\mathbf{v}'$ 中的分子数为

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') d\mathbf{x}d\mathbf{v}', \quad (2.47)$$

就得到在时间区间 $[t, t + dt]$ 内, 由于碰撞而进入 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 附近的微元 $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ 中的分子数为

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w}' \int d\Omega \sigma'(\Omega) |\mathbf{w}' - \mathbf{v}'| f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}') d\mathbf{x}d\mathbf{v}' dt, \quad (2.48)$$

其中积分是关于 \mathbf{w}' 及 Ω 进行的, 而 \mathbf{v}' 则是入射流的靶心.

由于反碰撞与原碰撞具有相同的微分散射截面 (见 (2.34) 式), 有

$$\sigma'(\Omega) = \sigma(\Omega), \quad (2.49)$$

其中 $\sigma(\Omega) = \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{v}', \mathbf{w}')$. 又由 (2.25) 及 (2.29) 式, 有

$$|\mathbf{w}' - \mathbf{v}'| = |\mathbf{w} - \mathbf{v}| \quad (2.50)$$

及

$$dv' dw' = dv dw. \quad (2.51)$$

利用 (2.49)–(2.51) 式, 由 (2.48) 式易得

$$J_+ = \int_{\mathbb{R}^3} dw \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}'). \quad (2.52)$$

在上式中, 对于任意给定的 \mathbf{v}, \mathbf{v}' 及 \mathbf{w}' 是 \mathbf{v}, \mathbf{w} 及 Ω 的函数.

将 (2.41) 及 (2.52) 代入 (2.21) 式, 就得到碰撞项

$$J = \int_{\mathbb{R}^3} dw \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| (f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}') - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{w})), \quad (2.53)$$

其中 $\sigma(\Omega) = \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{v}', \mathbf{w}')$ 为微分散射截面.

这样, 玻尔兹曼方程 (2.20) 就可具体写为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{g} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} dw \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| (f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}') \\ & \quad - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{w})). \end{aligned} \quad (2.54)$$

这是一个关于分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 的非线性积分-微分方程. 研究气体分子运动论的问题就化为求解上述方程.

§3. 稀疏气体的平衡态

3.1. 玻尔兹曼 H 定理

玻尔兹曼方程 (2.54) 的与时间 t 无关的解称为平衡分布函数. 它也应分布函数在 $t \rightarrow +\infty$ 时的极限状态.

假设不存在外力 ($\mathbf{g} \equiv 0$), 并相应地假设分布函数与 \mathbf{x} 无关: $f = f(t, \mathbf{v})$. 此时的平衡分布函数记为 $f_0(\mathbf{v})$. 由玻尔兹曼方程 (2.54), $f_0(\mathbf{v})$ 应满足

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| (f_0(\mathbf{v}') f_0(\mathbf{w}') - f_0(\mathbf{v}) f_0(\mathbf{w})) = 0, \quad (3.1)$$

于此, 对于任意给定的 \mathbf{v} , \mathbf{v}' 及 \mathbf{w}' 是 \mathbf{v} , \mathbf{w} 及 Ω 的函数.

显然, 若 $f_0(\mathbf{v})$ 满足

$$f_0(\mathbf{v}') f_0(\mathbf{w}') - f_0(\mathbf{v}) f_0(\mathbf{w}) = 0, \quad (3.2)$$

其中 $\{\mathbf{v}, \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$ 为一切可能的 (即具非零散射截面的) 碰撞, 则 $f_0(\mathbf{v})$ 为方程 (3.1) 的解, 从而为玻尔兹曼方程 (2.54) 的平衡态解.

下面我们要证明: 若 $f_0(\mathbf{v})$ 为方程 (3.1) 的解, 则它必满足 (3.2) 式. 于是在上述假设下, 成立 (3.2) 式是 $f_0(\mathbf{v})$ 为玻尔兹曼方程 (2.54) 的平衡态解的充要条件.

为证明这一点, 按照玻尔兹曼的做法, 定义泛函

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v} f(t, \mathbf{v}) \ln f(t, \mathbf{v}), \quad (3.3)$$

于此, $f(t, \mathbf{v})$ 为相应的非平衡态 (依赖于时间 t) 的分布函数. 由玻尔兹曼方程 (2.54), $f(t, \mathbf{v})$ 应满足

$$\frac{\partial f(t, \mathbf{v})}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| (f(t, \mathbf{v}') f(t, \mathbf{w}') - f(t, \mathbf{v}) f(t, \mathbf{w})). \quad (3.4)$$

将 (3.3) 对 t 求导一次, 得

$$\frac{dH(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v} \frac{\partial f(t, \mathbf{v})}{\partial t} (1 + \ln f(t, \mathbf{v})). \quad (3.5)$$

由此得到: f 为平衡分布函数, 即 $\frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0$ 的必要条件为

$$\frac{dH(t)}{dt} = 0. \quad (3.6)$$

这样, 下面我们只需证明 (3.6) 式与 (3.2) 式等价. 为此, 先证明下述的

玻尔兹曼 H 定理 若 $f(t, \mathbf{v})$ 满足玻尔兹曼方程 (2.54) (其中 $g \equiv 0$), 则成立

$$\frac{dH(t)}{dt} \leq 0. \quad (3.7)$$

证明 将 (3.4) 代入 (3.5) 式, 就得到

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| \\ \cdot (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) (1 + \ln f_1), \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中简记 $f_1 = f(t, \mathbf{v})$, $f'_1 = f(t, \mathbf{v}')$ 等.

注意到交换 \mathbf{v} 与 \mathbf{w} 不改变 $\sigma(\Omega)$ 之值 (因碰撞的两个分子未变化), 由上式易得

$$\frac{dH(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} dv \int_{\mathbb{R}^3} dw \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| \cdot (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) (1 + \ln f_2). \quad (3.9)$$

将 (3.8) 与 (3.9) 两式相加, 有

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv \int_{\mathbb{R}^3} dw \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| \cdot (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) (2 + \ln(f_1 f_2)). \quad (3.10)$$

将上式右端积分中的 $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ 和 $\{\mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$ 互换, 可得

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \int_{\mathbb{R}^3} dw' \int d\Omega \sigma'(\Omega) |\mathbf{w}' - \mathbf{v}'| \cdot (f_1 f_2 - f'_1 f'_2) (2 + \ln(f'_1 f'_2)). \quad (3.11)$$

由于每一碰撞 $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \rightarrow \{\mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$ 均有一逆碰撞 $\{\mathbf{v}', \mathbf{w}'\} \rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, 且它们有相同的微分散射截面:

$$\sigma'(\Omega) = \sigma(\Omega) \quad (3.12)$$

(见 (2.34) 式), 并注意到 (2.25) 及 (2.29) 式, (3.11) 式可改写为

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv \int_{\mathbb{R}^3} dw \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| \cdot (f_1 f_2 - f'_1 f'_2) (2 + \ln(f'_1 f'_2)). \quad (3.13)$$

将上式与 (3.10) 式相加, 就得到

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} dv \int_{\mathbb{R}^3} dw \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| \cdot (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) (\ln(f_1 f_2) - \ln(f'_1 f'_2)). \quad (3.14)$$

由于 $\ln x$ 在其定义域中是一个严格单调增加的函数, 有

$$(b-a)(\ln b - \ln a) \geq 0, \quad \forall a, b > 0, \quad (3.15)$$

因此 (3.14) 式右端积分中的被积函数不可能取正值, 从而 (3.7) 式成立. 证毕.

作为上述证明的一个副产品, 不难看出: (3.6) 式当且仅当 (3.14) 式右端的被积函数恒为零, 即

$$f_1' f_2' - f_1 f_2 = 0 \quad (3.16)$$

时成立. 由此立刻得到 (3.6) 式与 (3.2) 式等价的结论.

由此也可以想见, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 应有 $f(t, \mathbf{v}) \rightarrow f_0(\mathbf{v})$, 但对具体的定解问题, 这一点还有赖于严格的证明.

顺便说一下, 玻尔兹曼 H 定理说明玻尔兹曼方程的不可逆性. 实际上, 可以证明: 对理想气体而言, 函数 H 与气体的熵仅相差一个负常数因子. 关于玻尔兹曼方程不可逆性更深入的说明, 参见 [3], [5].

3.2. 麦克斯韦 - 玻尔兹曼分布

由上段所述, 平衡分布函数 $f_0(\mathbf{v})$ 是方程 (3.2) 的解. 这个分布称为 麦克斯韦 - 玻尔兹曼分布.

现在来确定这个分布的具体形式.

对 (3.2) 式取对数, 有

$$\ln f_0(\mathbf{v}) + \ln f_0(\mathbf{w}) = \ln f_0(\mathbf{v}') + \ln f_0(\mathbf{w}'). \quad (3.17)$$

由于 $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ 及 $\{\mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$ 分别为任一可能的碰撞的初始及末端状态, 上式具有一种守恒律的形式. 于是, 若 $\chi(\mathbf{v})$ 为一个与速度为 \mathbf{v} 的分子有关的量, 使 $\chi(\mathbf{v}) + \chi(\mathbf{w})$ 在两个分子的碰撞下守恒:

$$\chi(\mathbf{v}) + \chi(\mathbf{w}) = \chi(\mathbf{v}') + \chi(\mathbf{w}'), \quad (3.18)$$

则方程 (3.17) 就有一个解

$$\ln f_0(\mathbf{v}) = \chi(\mathbf{v}). \quad (3.19)$$

由叠加原理, (3.17) 的一般解为

$$\ln f_0(\mathbf{v}) = \chi_1(\mathbf{v}) + \chi_2(\mathbf{v}) + \cdots, \quad (3.20)$$

其中 χ_1, χ_2, \cdots 穷尽所有可能的独立守恒量.

对于一个设为无自旋 (无内部结构) 的分子, 其质量 (为一常数)、动量 (或 \mathbf{v}) 及能量 (或 $|\mathbf{v}|^2$) 均是守恒量. 因此, $\ln f_0(\mathbf{v})$ 应为 $|\mathbf{v}|^2$ 、 \mathbf{v} 的三个分量及一个常数的线性组合, 可写为

$$\ln f_0(\mathbf{v}) = -A|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|^2 + \ln C' \quad (3.21)$$

或

$$f_0(\mathbf{v}) = C e^{-A|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|^2}, \quad (3.22)$$

其中 C 、 A 及 \mathbf{v}_0 的三个分量为五个常数, 可以通过对系统的观测来决定.

将 (3.22) 代入 (2.3) 式, 容易得到单位体积内的分子数

$$\begin{aligned} n &= C \int_{\mathbb{R}^3} e^{-A|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|^2} d\mathbf{v} \\ &= C \int_{\mathbb{R}^3} e^{-A|\mathbf{v}|^2} d\mathbf{v} \\ &= C \left(\frac{\pi}{A} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

由此可得 $A > 0$, 而

$$C = \left(\frac{A}{\pi} \right)^{3/2} n. \quad (3.24)$$

将 (3.22) 代入 (2.5) 式, 可得气体分子的平均速度

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{C}{n} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} e^{-A|\mathbf{v}-\mathbf{v}_0|^2} d\mathbf{v} \\ &= \frac{C}{n} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_0) e^{-A|\mathbf{v}|^2} d\mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

这里, 我们利用了 (3.23) 式及

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} e^{-A|\mathbf{v}|^2} d\mathbf{v} = 0.$$

这样, 若设气体作为一个整体没有平移运动, 必须取

$$\mathbf{v}_0 = 0. \quad (3.26)$$

现在再计算分子的平均热能. 为此, 必须取 $\mathbf{v}_0 = 0$ 以排除宏观的动能. 注意到 (2.6) 式右端的物理意义, 易知分子的平均热能为

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2} |\mathbf{v}|^2 f(t, \mathbf{v}) d\mathbf{v}}{n} \\ &= \frac{M}{2n} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 f_0(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ &= \frac{MC}{2n} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 e^{-A|\mathbf{v}|^2} d\mathbf{v} \\ &= \frac{3}{4} \frac{M}{A}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

于是

$$A = \frac{3}{4} \frac{M}{\epsilon}. \quad (3.28)$$

再由 (3.24) 式, 就得到

$$C = \left(\frac{3M}{4\pi\epsilon} \right)^{3/2} n. \quad (3.29)$$

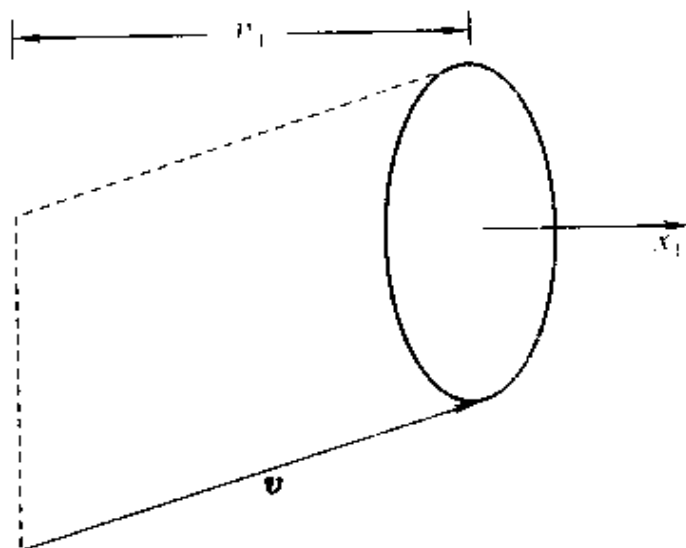


图 6

为了将平均热能 ϵ 用一个可以直接测量的量来表示, 我们来求相应于平衡分布函数的状态方程, 即给出压强的相应表达式. 根据定义, 压强为气体作用在完全反射平面的单位面积上的平均力. 设图 6 中的圆盘表示此单位面积, 其法向为 x_1 轴. 在分子的平均速度为零的假设下, 一个分子仅当其速度 \mathbf{v} 在 x_1 方向的分量 $v_1 > 0$ 时才可能打上这个平面. 而分子在此平面上的反射仅改变这一速度分量的符号, 从而使此分子损失动量 $2Mv_1$. 不难看出, 单位时间中被此圆盘反射、速度在 \mathbf{v} ($v_1 > 0$) 附近的微元 $d\mathbf{v}$ 中的分子数等于包含在以此圆盘为底、母线平行于 \mathbf{v} 而高为 v_1 的圆柱体中的分子数 $f(t, \mathbf{v})v_1 d\mathbf{v}$. 这样, 损失的动量为

$$2Mv_1^2 f(t, \mathbf{v}) d\mathbf{v}.$$

因此, 对分子平均速度为零的气体, 由于上述原因在单位时间内损失的总动量, 即压强, 为

$$\begin{aligned} p &= \int_{v_1 > 0} 2Mv_1^2 f(t, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ &= \int_{v_1 > 0} 2Mv_1^2 f_0(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ &= MC \int_{\mathbb{R}^3} v_1^2 e^{-A|\mathbf{v}|^2} d\mathbf{v} \\ &= \frac{MC}{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 e^{-A|\mathbf{v}|^2} d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

再注意到 (3.27) 式, 由上式即得

$$p = \frac{2}{3} n \epsilon. \quad (3.30)$$

这就是状态方程.

又由 (2.9) 式, 在 $f = f_0(\mathbf{v}) = C e^{-A|\mathbf{v}|^2}$ 时, 有

$$p = nkT,$$

其中 k 为玻尔兹曼常数. 这样 (3.30) 式又可写为

$$\epsilon = \frac{3}{2} kT. \quad (3.31)$$

从而, 由 (3.28) (3.29) 式又有

$$A = \frac{M}{2kT}, \quad C = n \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2}. \quad (3.32)$$

这样, 用温度 T 、平均速度 \mathbf{v}_0 、分子密度 n 及分子质量 M 来表示, 在无外力作用时稀疏气体的平衡分布函数可写为

$$f_0(\mathbf{v}) = n \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-M|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|^2 / 2kT}. \quad (3.33)$$

这就是麦克斯韦 - 玻尔兹曼分布.

下面讨论存在外力场的情况. 在粒子所受外力为由

$$\mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}) \quad (3.34)$$

给出的保守力的情况下, 不难证明

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{v})e^{-\phi(\mathbf{x})/kT} \quad (3.35)$$

为玻尔兹曼方程 (2.54) 的一个与时间 t 无关的解, 即稳态解, 其中 $f_0(\mathbf{v})$ 为由 (3.33) 式 (其中 $\mathbf{v}_0 = 0$) 给出的麦克斯韦 - 玻尔兹曼分布. 事实上, 此时显然有 $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, 而由 (2.53) 式, 并利用 (3.2) 式, 碰撞项

$$J = e^{-2\phi(\mathbf{x})/kT} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| \cdot (f_0(\mathbf{v}')f_0(\mathbf{w}') - f_0(\mathbf{v})f_0(\mathbf{w})) = 0.$$

此外, 可以直接验证

$$\left(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{M} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0. \quad (3.36)$$

对于平衡分布函数 (3.35), 可以将因子 $e^{-\phi(\mathbf{x})/kT}$ 吸收到分子密度 n 中, 而将其改写为

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = n(\mathbf{x}) \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-M \cdot \mathbf{v}^2 / 2kT}, \quad (3.37)$$

其中

$$n(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f_0(\mathbf{v}) d\mathbf{v} e^{-\phi(\mathbf{x})/kT} = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (3.38)$$

在粒子所受外力为一常向量 $\mathbf{F} = M\mathbf{g}$ 时 (在重力场中即如此), 容易直接验证

$$f(t, \mathbf{v}) = n \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-M|\mathbf{v}-\mathbf{g}t|^2/2kT} \quad (3.39)$$

为玻尔兹曼方程 (2.54) 的解, 即满足

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{g} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0, \quad (3.40)$$

而碰撞项 J 仍为零. 由 (3.39) 式给出的分布函数虽然不是玻尔兹曼方程的稳态解, 但仍描述气体的平衡态, 只不过此时气体作为一个整体作宏观的匀加速运动.

§4. 守恒定律

为了研究气体的非平衡现象, 必须对给定的初始条件, 通过求解玻尔兹曼方程而得到相应的分布函数. 但即使不直接求解玻尔兹曼方程, 也可以从在任何分子碰撞中严格守恒的动力学量出发, 推导出玻尔兹曼方程任意解的某些精确的性质.

设 $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 是一个与位置在 \mathbf{x} 、速度在 \mathbf{v} 的分子有关的量, 使得对在点 \mathbf{x} 发生的任何碰撞 $\{\mathbf{v}, \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$, 均成立

$$\chi_1 + \chi_2 = \chi'_1 + \chi'_2, \quad (4.1)$$

其中 $\chi_1 = \chi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, $\chi_2 = \chi(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ 等等, 就称 χ 是一个守恒量.

对于守恒量, 成立如下的

定理 4.1. 恒成立

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v} \chi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) J(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0. \quad (4.2)$$

其中 $J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 为玻尔兹曼方程 (2.54) 的右端项, 即

$$J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}| \cdot (f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}') f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}') - f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})), \quad (4.3)$$

但其中 $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 并不要求是玻尔兹曼方程的解. 这里为简单起见, 未标出 J 关于 t 的明显依赖性.

证明 由 (4.3) 式, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{v} \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{v} \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}| \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \cdot (f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}') f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}') - f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})). \end{aligned} \quad (4.4)$$

交换 (4.4) 式右端的积分变量 \boldsymbol{v} 与 \boldsymbol{w} , 注意到此时 $\sigma(\Omega)$ 保持不变, 再将所得的结果与 (4.4) 式相加, 就得到

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{v} \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{v} \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}| \cdot (f_1' f_2' - f_1 f_2) (\chi_1 + \chi_2), \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中 $f_1 = f_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$, $f_2 = f_2(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ 等.

将 (4.5) 式右端的 $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ 与 $\{\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}'\}$ 交换, 注意到 (2.25)、(2.29) 及 (2.34) 诸式, 可将 (4.5) 式改写为

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{v} \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv \int_{\mathbb{R}^3} dw \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| \cdot (f_1 f_2 - f'_1 f'_2) (\chi'_1 - \chi'_2). \quad (4.6)$$

由于 χ 是守恒量, 即 (4.1) 式成立, 由 (4.5) 与 (4.6) 式立即得到 (4.2) 式. 定理证毕.

利用上述定理, 只要在玻尔兹曼方程 (2.54) 两端乘上相应的守恒量 χ , 并对 \mathbf{v} 积分, 就可以由玻尔兹曼方程推出相应的守恒定律. 此时, 由定理 4.1, 与碰撞项 J 对应的积分为零, 于是有

$$\int_{\mathbb{R}^3} dv \chi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial}{\partial v_i} \right) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0. \quad (4.7)$$

易知上式可写为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} dv \chi f + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} dv \chi v_i f - \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} dv \frac{\partial \chi}{\partial x_i} v_i f \\ & + \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} dv \frac{\partial}{\partial v_i} (\chi g_i f) - \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} dv \frac{\partial \chi}{\partial v_i} g_i f \\ & - \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} dv \chi \frac{\partial g_i}{\partial v_i} f = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

总假设当 $|\mathbf{v}| \rightarrow \infty$ 时, $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 趋于零, 从而由格林公式有

$$\int_{\mathbb{R}^3} dv \frac{\partial}{\partial v_i} (\chi g_i f) = 0. \quad (4.9)$$

对于一个与 \mathbf{v} 有关的量 A , 定义其平均值为

$$\langle A \rangle \triangleq \frac{\int_{\mathbb{R}^3} dv A f}{\int_{\mathbb{R}^3} dv f} = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} dv A f, \quad (4.10)$$

其中 $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 为玻尔兹曼方程 (2.54) 的任一解, 而 $n = n(t, \mathbf{x})$ 为在 t 时刻、在 \mathbf{x} 处单位体积中的气体分子数. 由此就有

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v} A f = n \langle A \rangle = \langle n A \rangle. \quad (4.10)'$$

注意到 (4.9) 式, 由 (4.8) 及 (4.10)' 式就可得到如下结论.

定理 4.2 (守恒定理) 对任何守恒量 χ , 恒成立

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle n \chi \rangle + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \langle n v_i \chi \rangle - n \sum_{i=1}^3 \left\langle v_i \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right\rangle \\ - n \sum_{i=1}^3 \left\langle g_i \frac{\partial \chi}{\partial v_i} \right\rangle - n \sum_{i=1}^3 \left\langle \frac{\partial g_i}{\partial v_i} \chi \right\rangle = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

而其中在定义平均值时所用的 f 为玻尔兹曼方程 (2.54) 的任一解.

像通常一样, 以下仅限于考察 \mathbf{g} 与 \mathbf{v} 无关的情形, 此时上式左端最后一项为零, 从而有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle n \chi \rangle + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \langle n v_i \chi \rangle - n \sum_{i=1}^3 \left\langle v_i \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right\rangle \\ - n \sum_{i=1}^3 \left\langle g_i \frac{\partial \chi}{\partial v_i} \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

在单一分子的情形, 独立的守恒量有质量、动量及能量. 分别取

$$\chi = M, \quad \chi = M v_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{及} \quad \chi = \frac{1}{2} M |\mathbf{v}|^2,$$

就可得到相应的独立守恒律方程.

在 (4.12) 式中取 $\chi = M$, 就有

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle nM \rangle + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \langle nM v_i \rangle = 0. \quad (4.13)$$

注意到

$$\langle nM \rangle = nM = \rho(t, \mathbf{x}) \quad (4.14)$$

为质量密度 (见 (2.4) 式), 而

$$\langle nM v_i \rangle = nM \frac{\int_{\mathbb{R}^3} dv v_i f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{n} = \rho V_i, \quad (4.15)$$

其中 \mathbf{V} 为平均速度 (见 (2.5) 式), (4.13) 式就化为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (4.16)$$

这就是熟知的质量守恒定律 —— 连续性方程 (见第二章 (1.10) 式).

在 (4.12) 式中取 $\chi = M v_i$, 就有

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle nM v_i \rangle + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \langle nM v_i v_j \rangle - nM g_i = 0. \quad (4.17)$$

利用 (4.14) — (4.15) 式, 并注意到

$$\begin{aligned} \langle v_i v_j \rangle &= \langle (v_i - V_i)(v_j - V_j) \rangle + \langle v_i \rangle V_j + V_i \langle v_j \rangle - V_i V_j \\ &= \langle (v_i - V_i)(v_j - V_j) \rangle + V_i V_j \end{aligned}$$

及由 (2.7) 式可得压力张量

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \int_{\mathbb{R}^3} M (v_i - V_i)(v_j - V_j) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) dv \\ &= \rho \langle (v_i - V_i)(v_j - V_j) \rangle, \end{aligned} \quad (4.18)$$

就可将 (4.17) 式改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_i V_j) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = \rho g_i$$

($i = 1, 2, 3$),

即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \mathbf{P}) = \rho \mathbf{g}, \quad (4.19)$$

其中 $\mathbf{P} = (p_{ij})$. 这就是 动量守恒方程组 (见第二章 (2.23) 式, 但这儿的压力张量 \mathbf{P} 与第二章中的应力张量相差一个负号).

利用连续性方程 (4.16) 化简 (4.19) 式, 就得到

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{P} = \mathbf{g} \quad (4.20)$$

或

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{P} = \mathbf{g}, \quad (4.21)$$

其中 $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial}{\partial x_k}$. 这就是 欧拉方程 (参见第二章 (2.26) 式).

最后, 在 (4.12) 式中取 $\chi = \frac{1}{2}M|\mathbf{v}|^2$, 就有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle nM|\mathbf{v}|^2 \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \langle nM v_i |\mathbf{v}|^2 \rangle \\ - n \sum_{i=1}^3 \langle M g_i v_i \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

由 (2.10)---(2.11) 式知

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\langle nM|\mathbf{v}|^2\rangle &= \frac{3}{2}nkT + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{V}|^2 \\ &= \rho e + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{V}|^2.\end{aligned}\quad (4.23)$$

其中 e 为单位质量气体的内能. 又

$$n\sum_{i=1}^3\langle Mg_iv_i\rangle = \sum_{i=1}^3\rho g_i\langle v_i\rangle = \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{V}.\quad (4.24)$$

现在来看 (4.22) 式左端的第二项. 显然

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\langle nMv_i|\mathbf{v}|^2\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle nM(v_i - V_i)|\mathbf{v}|^2\rangle + \frac{1}{2}\langle nMV_i|\mathbf{v}|^2\rangle.\end{aligned}\quad (4.25)$$

由 (4.23) 式, 有

$$\frac{1}{2}\langle nMV_i|\mathbf{v}|^2\rangle = \left(\rho e + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{V}|^2\right)V_i.\quad (4.26)$$

而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\langle nM(v_i - V_i)|\mathbf{v}|^2\rangle \\ &= \frac{1}{2}nM\langle(v_i - V_i)(|\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2 + 2(\mathbf{v} - \mathbf{V})\cdot\mathbf{V} + |\mathbf{V}|^2)\rangle \\ &= \frac{1}{2}nM\langle(v_i - V_i)|\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2\rangle \\ &\quad + nM\langle(v_i - V_i)(\mathbf{v} - \mathbf{V})\rangle\cdot\mathbf{V} + \frac{1}{2}nM\langle v_i - V_i\rangle|\mathbf{V}|^2 \\ &= \frac{1}{2}nM\langle(v_i - V_i)|\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + nM \sum_{j=1}^3 \langle (v_j - V_j)(v_j - V_j) \rangle V_j \\
= & q_i + \sum_{j=1}^3 p_{ij} V_j.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

这里, 我们利用了 (4.14) 及 (4.18) 式, 而

$$\begin{aligned}
q_i &= \frac{1}{2} nM \langle (v_i - V_i) |\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2 \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2} (v_i - V_i) |\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

利用以上诸式, 由 (4.22) 式即得 能量守恒方程 (见第二章 (2.29) 式)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 \right) \mathbf{V} + \mathbf{P}\mathbf{V} \right) \\
= & -\operatorname{div} \mathbf{Q} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{V},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

其中 $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, q_3)$ 相当于热量流密度向量 $-\kappa \operatorname{grad} T$.

利用连续性方程 (4.16), 上式可以化简为

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) + \operatorname{div}(\mathbf{P}\mathbf{V}) \\
= & -\operatorname{div} \mathbf{Q} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{V},
\end{aligned} \tag{4.30}$$

其中 $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial}{\partial x_k}$, 再由欧拉方程 (4.21), (4.30) 式又可进一步化为

$$\rho \frac{de}{dt} + \sum_{i,j=1}^3 p_{ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = -\operatorname{div} \mathbf{Q}. \tag{4.31}$$

记

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.32)$$

注意到 $\{p_{ij}\}$ 的对称性, (4.31) 式又可写为

$$\rho \frac{de}{dt} + \sum_{i,j=1}^3 p_{ij} S_{ij} = -\operatorname{div} \mathbf{Q}. \quad (4.33)$$

这样, 我们看到, 由守恒定理 (定理 4.2) 可以从形式上得到流体力学方程组, 但要使其真正发挥作用, 还必须求得玻尔兹曼方程 (2.54) 的解, 从而据此确定 \mathbf{P} 及 \mathbf{Q} , 使所得的方程组真正成为一封闭的、有物理意义的流体动力学方程组.

严格地求解玻尔兹曼方程 (2.54) 是很困难的, 下面将介绍一些有关的近似求解方法, 并相应地给出流体动力学方程组的各阶近似.

§5. 零阶近似

假设所考虑的气体尽管并不处于平衡状态, 但却与之相距不远. 特别, 假定在气体中任一点的邻域中, 分布函数均可局部地用麦克斯韦-玻尔兹曼分布来表示, 且密度、温度及平均速度在时、空中仅缓慢地变化. 对于这样的气体, 可自然地作下述近似:

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \approx f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}),$$

其中 $f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 由麦克斯韦-玻尔兹曼分布 (3.33) 给出, 即取

$$f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = n \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{M|\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2}{2kT} \right), \quad (5.1)$$

但其中 n 、 T 及 \mathbf{V} 是 t 和 \mathbf{x} 的缓慢变化的函数。

显然, $f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 不可能是玻尔兹曼方程 (2.54) 的一个精确解. 事实上, 由于 n 、 T 及 \mathbf{V} 均与 \mathbf{v} 无关, 并注意到 (2.22)–(2.23) 式, 显然有

$$J = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| (f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}') - f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{w})) = 0,$$

但一般来说

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{g} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \neq 0. \quad (5.2)$$

尽管如此, 我们仍假设 $f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 是分布函数的一个好的近似, 并讨论其在物理上的相应结论.

由于假设 $f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 是一个好的近似, 将 (5.1) 式中的 $nM = \rho$ 、 T 及 \mathbf{V} 视为相应的密度、温度及平均速度, 就应该近似地满足相应的守恒定律. 再由这些守恒定理就可以给出对 (5.1) 式中 ρ 、 T 及 \mathbf{V} 应有限制.

为了具体地得到这些守恒律, 必须计算此时相应的压力张量 (p_{ij}) 及热量流密度向量 (q_i) , 并将它们相应地记为 $(p_{ij}^{(0)})$ 及 $(q_i^{(0)})$. 记

$$C(t, \mathbf{x}) = n \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2}, \quad A(t, \mathbf{x}) = \frac{M}{2kT}, \quad (5.3)$$

(5.1) 式可写为

$$f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = C(t, \mathbf{x}) \exp(-A(t, \mathbf{x})|\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2). \quad (5.4)$$

相应于这个分布函数, 由 (4.28) 及 (2.7) 式知, 其热量流密度向量与压力张量分别为

$$q_i^{(0)} = \frac{M}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (v_i - V_i) |\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2 C(t, \mathbf{x})$$

$$\cdot \exp(-A(t, \mathbf{x})|\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2) d\mathbf{v} = 0 \quad (5.5)$$

及

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(0)} &= M \int_{\mathbb{R}^3} (v_i - V_i)(v_j - V_j) C(t, \mathbf{x}) \\ &\quad \cdot \exp(-A(t, \mathbf{x})|\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2) d\mathbf{v} \\ &= MC(t, \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^3} v_i v_j \exp(-A(t, \mathbf{x})|\mathbf{v}|^2) d\mathbf{v} \\ &= p \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

其中

$$\begin{aligned} p &= p(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{3} MC(t, \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 \exp(-A(t, \mathbf{x})|\mathbf{v}|^2) d\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{3} MC(t, \mathbf{x}) \cdot \frac{3}{2} \frac{\pi^{3/2}}{A^{5/2}} \\ &= nkT \end{aligned} \quad (5.7)$$

为局部静压强 (见 (2.9) 式).

将这样确定的 $q_i^{(0)}$ 及 $p_{ij}^{(0)}$ 代入动量守恒与能量守恒方程 (4.19) 与 (4.29), 再加上质量守恒方程 (4.16), 就得到此时相应的守恒方程组

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + p \mathbf{I}) = \rho \mathbf{g}, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 + p \right) \mathbf{V} \right) \\ = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

其中状态方程为

$$p = nkT = R\rho T \quad (\text{其中 } R = \frac{k}{M}), \quad (5.11)$$

且由 (2.11) 式有

$$e = \frac{3}{2} \frac{kT}{M} = C_V T \quad (\text{其中 } C_V = \frac{3}{2} R). \quad (5.12)$$

这说明所讨论的不仅是理想气体，而且还是多方气体（见第二章 (1.6)---(1.7) 式）。

这样，作为零阶近似，我们得到不计粘性及热传导的理想流体力学方程组（见第二章 (1.10)、(1.13) 及 (1.19) 式），而所讨论的气体则为多方气体。

如第二章 §1 中那样，利用连续性方程 (5.8)、动量守恒方程 (5.9) 可化为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \mathbf{g}, \quad (5.13)$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 V_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (5.14)$$

再利用连续性方程及上式，能量守恒方程 (5.10) 可化为

$$\rho \frac{de}{dt} + p \text{div} \mathbf{V} = 0. \quad (5.15)$$

再利用 (5.11) 及 (5.12) 式，上方程就化为

$$\frac{dT}{dt} + \frac{2}{3} T \text{div} \mathbf{V} = 0. \quad (5.16)$$

§6. 一阶近似

6.1. 恰普曼—恩斯科格 (Chapman-Enskog) 展开

为了得到关于玻尔兹曼方程 (2.54) 的更高阶近似，现在介

绍一个由恰普曼和恩斯科格提出来的、现称为 恰普曼 - 恩斯科格展开的方法.

记 λ 为分子的平均自由程, 即分子相继两次碰撞期间所走的平均距离. 在标准的温度与压强 (见本章 §1) 下

$$\lambda \approx 10^{-5} \text{厘米}.$$

记 L 为气体的宏观特征长度. 通常, $\varepsilon = \lambda/L$ 是一个很小的量.

粗略地说, 恰普曼 - 恩斯科格展开就是将分布函数 f 按 ε 的幂次展开为

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + \dots, \quad (6.1)$$

其中 $f^{(0)}$ 为上节给出的零阶近似, 而 $f^{(1)}/f^{(0)}$ 的量级为 ε , 等等, 因此可依次求得玻尔兹曼方程的各阶近似.

对于形如 (6.1) 的分布函数 f , 可将玻尔兹曼方程 (2.54) 写为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{g} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) (f^{(0)} + f^{(1)} + \dots) \\ &= J^{(0)} + J^{(1)} + \dots, \end{aligned} \quad (6.2)$$

其中

$$J^{(0)} = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| (f_1^{(0)'} f_2^{(0)'} - f_1^{(0)} f_2^{(0)}), \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} J^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| & (f_2^{(0)'} f_1^{(1)'} - f_2^{(0)} f_1^{(1)} \\ & + f_1^{(0)'} f_2^{(1)'} - f_1^{(0)} f_2^{(1)}), \end{aligned} \quad (6.4)$$

等等, 而 $f_1^{(0)'} = f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}')$, $f_1^{(1)} = f^{(1)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, $f_2^{(1)'} = f^{(1)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}')$ 等.

下面来分别分析 (6.2) 式中各项的量级.

假设分布函数的量只在点 \mathbf{x} 的位置变化一个距离 L 时才有可观的变化, 那么 (6.2) 式左端的玻尔兹曼算子 $-\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{g} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}$ 作用在一个分布函数上, 在量级上就相当于在该函数上乘以因子 \bar{V}/L , 其中 \bar{V} 为平均速度. 事实上, 对于 $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$ 这一项, 这一事实是显然的, 而另外两项亦假设与它有同样的量级.

现考察由 (6.4) 式右端给出的 $J^{(1)}$, 易见

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| f_2^{(0)} f_1^{(1)} \\ &= -f^{(1)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})/\tau \approx -\varepsilon f^{(0)}/\tau, \end{aligned} \quad (6.5)$$

其中

$$\tau = \left(\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) \right)^{-1}. \quad (6.6)$$

由 (2.38) 式, $\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{w})$ 表示以一个位于 \mathbf{x} 、速度为 \mathbf{v} 的分子为靶子, 一切可能的 \mathbf{w} 为入射流, 在单位时间内的碰撞次数. 因此, 作为其倒数的 τ , 就相当于碰撞时间 (相继两次碰撞之间的平均时间). 对于 (6.4) 右端的其它各项, 也有类似的结果. 而对于 (6.3) 的右端各项, 则少一个 ε 的因子.

这样, 在 (6.2) 式两端乘以 τ , 注意到 $\lambda \approx \bar{V}\tau$, 并令其两端关于 ε 的零阶项相等, 即得

$$J^{(0)} = 0. \quad (6.7)$$

这正是上节中 $f^{(0)}$ 所满足的方程.

再比较乘以 τ 后的 (6.2) 式两端关于 ε 的 1 次项, 就得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{g} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f^{(0)} = J^{(1)}. \quad (6.8)$$

由于 $f^{(0)}$ 已由 (5.1) 式给出, (6.8) 式就是 $f^{(1)}$ 应满足的积分方程.

为了简化上述积分方程, 代替未知函数 $f^{(1)}$, 由下式引进一个新的函数 ϕ :

$$f^{(1)} = f^{(0)}\phi. \quad (6.9)$$

将 (6.9) 式代入 $J^{(1)}$ 的表达式 (6.4), 并注意到由 $f^{(0)}$ 的定义 (5.1) 及 (2.22)–(2.23) 式可得

$$f_1^{(0)'} f_2^{(0)'} = f_1^{(0)} f_2^{(0)}, \quad (6.10)$$

就有

$$J^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^3} dw \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| f_1^{(0)} f_2^{(0)} \cdot (\phi_1' + \phi_2' - \phi_1 - \phi_2), \quad (6.11)$$

其中 $\phi_1 = \phi_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, $\phi_2' = \phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}')$ 等.

将方程 (6.8) 的两端除以 $f_1^{(0)} = f^{(0)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, 并利用 (6.11) 式, 就得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{g} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) \ln f^{(0)} = -n \tilde{J}(\phi), \quad (6.12)$$

其中

$$\tilde{J}(\phi) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} dw \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| f_2^{(0)} (\phi_1 + \phi_2 - \phi_1' - \phi_2'). \quad (6.13)$$

注意到 $f^{(0)}$ 的表达式 (5.1), 积分算子 \tilde{J} 实际上不依赖于 n , 因而也不依赖于 ρ .

先考察 (6.12) 式的左端. 因为 $f^{(0)}$ 对 t 及 \mathbf{x} 的依赖性是通过 ρ 、 T 及 \mathbf{V} 来实现的, 为了计算 (6.12) 式的左端, 必须

先计算 $f^{(0)}$ 关于 ρ 、 T 及 \mathbf{V} 等变量的偏导数. 由 (5.1) 式, 有

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \rho} = \frac{f^{(0)}}{\rho}, \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} = \frac{1}{T} \left(\frac{M|\mathbf{U}|^2}{2kT} - \frac{\rho}{2} \right) f^{(0)}, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} = \frac{M}{kT} U_i f^{(0)} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_i} = -\frac{M}{kT} U_i f^{(0)} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.17)$$

其中 $\mathbf{U} = \mathbf{v} - \mathbf{V} = (U_1, U_2, U_3)$. 这样, 我们就得到

$$\begin{aligned} & (6.12) \text{ 式的左端} \\ &= \frac{1}{f^{(0)}} \left\{ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x \rho \right) + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x T \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x V_i \right) + \mathbf{g} \cdot \nabla_v f^{(0)} \right\} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{T} \left(\frac{M|\mathbf{U}|^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \frac{DT}{Dt} \\ & \quad + \frac{M}{kT} \sum_{i=1}^3 U_i \frac{DV_i}{Dt} - \frac{M}{kT} \mathbf{g} \cdot \mathbf{U}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

其中

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (6.19)$$

利用零阶近似满足的理想流体力学方程组 (5.8)、(5.16) 及 (5.13), 有

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{U} \cdot \nabla_x \rho,$$

$$\begin{aligned}\frac{DT}{Dt} &= -\frac{2}{3}T\operatorname{div}\mathbf{V} + \mathbf{U} \cdot \nabla_x T, \\ \frac{DV_i}{Dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \mathbf{U} \cdot \nabla_x V_i \quad (i=1,2,3).\end{aligned}$$

将以上诸式代入 (6.18) 式, 并利用状态方程 (5.11), 即得

$$\begin{aligned}& (6.12) \text{ 式的左端} \\ &= -\operatorname{div}\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\mathbf{U} \cdot \nabla_x \rho \\ & \quad + \frac{1}{T} \left(\frac{M|\mathbf{U}|^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \left(-\frac{2}{3}T\operatorname{div}\mathbf{V} + \mathbf{U} \cdot \nabla_x T \right) \\ & \quad + \frac{M}{kT} \sum_{i=1}^3 U_i \left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \mathbf{U} \cdot \nabla_x V_i \right) - \frac{M}{kT} \mathbf{g} \cdot \mathbf{U} \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{M}{2kT} |\mathbf{U}|^2 - \frac{5}{2} \right) \mathbf{U} \cdot \nabla_x T \\ & \quad + \frac{M}{kT} \sum_{i,j=1}^3 \left(U_i U_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} |\mathbf{U}|^2 \right) S_{ij}, \tag{6.20}\end{aligned}$$

其中 S_{ij} 由 (4.32) 式给出.

这样, ϕ 满足的积分方程 (6.12) 就可写为如下的形式:

$$\begin{aligned}\tilde{J}(\phi) &= -\frac{1}{nkT^2} \left(\frac{1}{2}M|\mathbf{U}|^2 - \frac{5}{2}kT \right) \mathbf{U} \cdot \nabla_x T \\ & \quad - \frac{M}{nkT} \sum_{i,j=1}^3 \left(U_i U_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} |\mathbf{U}|^2 \right) S_{ij}. \tag{6.21}\end{aligned}$$

由此可见, $\tilde{J}(\phi)$ 对 \mathbf{v} 的依赖性是通过 \mathbf{U} 的依赖性来实现的, 而且 $\tilde{J}(\phi)$ 是 $\nabla_x T$ 及 $\mathbf{S} = (S_{ij})$ 的 (系数依赖于 \mathbf{U} 及 T 的) 线性组合再除以 n . 再注意到由 (6.13) 式, $\tilde{J}(\phi)$ 线性地

依赖于 ϕ , 我们有理由假定 ϕ 具有以下形式:

$$\phi = -\frac{1}{nkT^2} \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{nkT} \sum_{i,j=1}^3 b_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}, \quad (6.22)$$

其中 a_i, b_{ij} 均为 \mathbf{U} 及 T 的待定函数. 将其代入 (6.21) 式, 并比较其两端 $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ 和 $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ 的系数, 即得

$$\tilde{J}(a_i) = \tilde{a}_i, \quad \tilde{J}(b_{ij}) = \tilde{b}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (6.23)$$

其中

$$\tilde{a}_i = \left(\frac{1}{2} M |\mathbf{U}|^2 - \frac{5}{2} kT \right) U_i, \quad \tilde{b}_{ij} = M \left(U_i U_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} |\mathbf{U}|^2 \right). \quad (6.24)$$

(6.23) 及 (6.24) 分别为决定 a_i 及 b_{ij} 的积分方程. 一旦由它们解得 a_i 及 b_{ij} , 就可由 (6.22) 得到 ϕ , 从而由 (6.9) 式得到玻尔兹曼方程 (2.54) 的解的一阶近似 $f^{(1)}$.

6.2. 积分方程的可解性

设 $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 为所求的分布函数, 则由 (2.3)、(2.5) 及 (2.6) 式, 易见有

$$\begin{aligned} n &= \int_{\mathbb{R}^3} f d\mathbf{v}, \\ n\mathbf{V} &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f d\mathbf{v} \end{aligned}$$

及

$$\frac{3}{2} nkT + \frac{1}{2} nM |\mathbf{V}|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} M |\mathbf{v}|^2 f d\mathbf{v}.$$

由本章 §5 中给出的 $f^{(0)}$ 的定义, 在以上诸式中将 f 换为 $f^{(0)}$, 它们依然成立. 因此

$$\int_{\mathbb{R}^3} (f - f^{(0)}) \chi d\mathbf{v} = 0 \quad (6.25)$$

对一切守恒量 χ (见 §4) 成立. 假设 $f = f^{(0)} + f^{(0)}\phi$, 就有

$$\int_{\mathbb{R}^3} f^{(0)}\phi\chi dv = 0 \quad (6.26)$$

对一切守恒量 χ 成立.

记 H 为由 v 的函数所组成的希尔伯特 (D.Hilbert) 空间, 其中元素 $\phi, \psi \in H$ 的内积定义为

$$(\phi, \psi)_H = \int_{\mathbb{R}^3} f^{(0)}\phi\psi dv. \quad (6.27)$$

这样, (6.26) 式就可改写为

$$(\phi, \chi)_H = 0 \quad (6.28)$$

对一切守恒量 χ 成立, 即 ϕ 与 5 个守恒量 (即质量、动量及能量) 张成的空间正交. 注意到 ϕ 的表达式 (6.22), 由上式就有

$$(a_i, \chi)_H = 0, \quad (b_{ij}, \chi)_H = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.29)$$

对一切守恒量 χ 成立.

将 \tilde{J} 视为上述希尔伯特空间 H 中的积分算子. 由 \tilde{J} 的定义 (6.13) 不难验证

$$(\tilde{J}(\phi), \psi)_H = (\phi, \tilde{J}(\psi))_H, \quad \forall \phi, \psi \in \tilde{J} \text{ 的定义域}; \quad (6.30)$$

而且 \tilde{J} 是非负的, 即成立

$$(\tilde{J}(\phi), \phi)_H \geq 0, \quad \forall \phi \in \tilde{J} \text{ 的定义域}. \quad (6.31)$$

以上两式的证明作为习题留给读者.

此外, 由 \tilde{J} 的定义及守恒量的定义 (4.1), 不难看出: 算子 \tilde{J} 的核为由上述 5 个守恒量所张成的空间, 即

$$\tilde{J}(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi \text{ 为守恒量}. \quad (6.32)$$

另外, 利用 \tilde{a}_i 及 \tilde{b}_{ij} 的表达式 (6.24) 可以直接验证

$$(\tilde{a}_i, \chi)_H = 0, \quad (\tilde{b}_{ij}, \chi)_H = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.33)$$

对一切守恒量 χ 成立 (见习题 4). 可以证明算子 \tilde{J} 是自共轭的, 而上式正是自共轭积分方程 (6.23) 的可解性条件 (见 [4]).

由 \tilde{a}_i 的定义 (6.24) 式可以看出, $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)^T$ 为 U -空间中的一阶张量 (向量) (见附录一). 利用微分散射截面关于正交变换的不变性不难验证: 积分方程 $\tilde{J}(a_i) = \tilde{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$) 的解 $(a_1, a_2, a_3)^T$ 也应是 U -空间中的一阶张量, 而且对任一正交变换, 它的转换方式与 $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)^T$ 完全一样. 所以应有

$$a_i = \alpha(T, |\mathbf{U}|) \tilde{a}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.34)$$

类似地, 有

$$b_{ij} = \beta(T, |\mathbf{U}|) \tilde{b}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (6.35)$$

注意到 \tilde{J} 的非负性 (6.31), α 及 β 均为正函数. 又由于 \tilde{J} 不依赖于 ρ , α 及 β 只是 $(T, |\mathbf{U}|)$ 的函数, 亦与 ρ 无关.

6.3. 粘性系数和导热系数

到目前为止, 我们虽然证明了玻尔兹曼方程一阶近似的可解性, 还没有具体给出一阶近似的解, 但至少在形式上已经可以给出压力张量及热量流密度向量, 从而可由此给出粘性系数及导热系数.

首先讨论热量流密度向量. 注意到 $\mathbf{U} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ 及 (5.5) 式, 由 (4.28) 式有

$$q_i = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2} U_i |\mathbf{U}|^2 (f^{(0)} + f^{(0)} \phi) d\mathbf{U}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2} U_i |\mathbf{U}|^2 f^{(0)} \phi d\mathbf{v} \\
&= \left(\frac{M}{2} U_i |\mathbf{U}|^2, \phi \right)_H.
\end{aligned} \tag{6.36}$$

由 (6.35) 及 (6.24) 式易见, b_{ij} 为 \mathbf{U} 的偶函数, 从而有

$$\left(\frac{M}{2} U_i |\mathbf{U}|^2, b_{ij} \right)_H = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{6.37}$$

类似地, 有

$$\left(\frac{M}{2} U_i |\mathbf{U}|^2, a_j \right)_H = 0 \quad (i \neq j) \tag{6.38}$$

及

$$\left(\frac{M}{2} U_i |\mathbf{U}|^2, a_i \right)_H = (\tilde{a}_i, a_i)_H = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 (\tilde{a}_j, a_j)_H. \tag{6.39}$$

在得到 (6.39) 式的过程中, 我们利用了 U_i 为守恒量, 而 a_i 与任一守恒量在空间 H 中正交 (见 (6.29) 式) 的事实. 利用 ϕ 的表达式 (6.22), 并注意到以上各式, 由 (6.36) 式就得到

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{6.40}$$

其中导热系数

$$\kappa = \frac{1}{3nkT^2} \sum_{j=1}^3 (\tilde{a}_j, a_j)_H. \tag{6.41}$$

将由 (6.24) 及 (6.34) 式给出的 \tilde{a}_j 及 a_j 代入上式, 并注意到内积 $(\cdot, \cdot)_H$ 的定义 (6.27) 及 $f^{(0)}$ 的表达式 (5.1), 我们有

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{1}{3} \left(\frac{M}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} k^{-\frac{5}{2}} T^{-\frac{7}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \alpha(T, |\mathbf{U}|) \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{2} M |\mathbf{U}|^2 - \frac{5}{2} kT \right)^2 |\mathbf{U}|^2 e^{-\frac{M|\mathbf{U}|^2}{2kT}} d\mathbf{U}.
\end{aligned} \tag{6.42}$$

引进球面坐标, 可将上式右端的三重积分化为单重积分, 再作简单的变量代换, 就可得到导热系数

$$\kappa = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}M} k^2 T \int_0^\infty \alpha \left(T, \sqrt{\frac{kT}{M}} r \right) (r^2 - 5)^2 r^4 e^{-\frac{1}{2}r^2} dr. \quad (6.43)$$

尽管并未给出函数 $\alpha(T, |U|)$ 的确切形式, 但由上式已经可以看出: 导热系数 κ 只依赖于绝对温度 T .

其次讨论压力张量. 利用 (5.6)—(5.7) 式, 可将压力张量 $\mathbf{P} = (p_{ij})$ (见 (2.7) 式) 表示为

$$p_{ij} = p\delta_{ij} + p'_{ij}, \quad (6.44)$$

其中

$$p = nkT, \quad (6.45)$$

而

$$\begin{aligned} p'_{ij} &= \int_{\mathbb{R}^3} MU_i U_j f^{(0)} \phi dU \\ &= (MU_i U_j, \phi)_H. \end{aligned} \quad (6.46)$$

类似于 (6.37) 式, 不难验证

$$(MU_i U_j, a_i)_H = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (6.47)$$

这样, 将 ϕ 的表达式 (6.22) 代入 (6.46) 式, 就得到

$$p'_{ij} = -\frac{M}{nkT} \sum_{l,m=1}^3 (U_i U_j, b_{lm})_H \frac{\partial V_l}{\partial x_m}. \quad (6.48)$$

注意到 $|U|^2$ 为守恒量, 而 b_{lm} 与任一守恒量在 H 空间中正交 (见 (6.28) 式), 由 \tilde{b}_{ij} 的定义 (6.23) 式, 并注意到 (b_{lm}) 的对称

性, 上式又可改写为

$$\begin{aligned} p'_{ij} &= -\frac{1}{nkT} \sum_{l,m=1}^3 (\tilde{b}_{ij}, b_{lm})_H \frac{\partial V_l}{\partial x_m} \\ &= -\frac{1}{nkT} \sum_{l,m=1}^3 (\tilde{b}_{ij}, b_{lm})_H S_{lm}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

利用 (6.24) 和 (6.35) 式, 并注意到 b_{ij} 与守恒量 $|\mathbf{U}|^2$ 正交, 不难验证

$$(\tilde{b}_{ij}, b_{lm})_H = 0, \text{ 若 } i \neq j, (l, m) \text{ 或 } (m, l) \neq (i, j), \quad (6.50)$$

$$(\tilde{b}_{ii}, b_{lm})_H = 0, \text{ 若 } l \neq m, \quad (6.51)$$

而 $(\tilde{b}_{ij}, b_{ij})_H$ 在 $i \neq j$ 时, 其值与 i, j 无关. 因此, 由 (6.49) 式易见

$$p'_{ij} = -2\mu S_{ij}, \quad \text{若 } i \neq j, \quad (6.52)$$

其中

$$\mu = \frac{1}{nkT} (\tilde{b}_{ij}, b_{ij})_H = \frac{M^2}{nkT} (U_i U_j, \beta U_i U_j), \quad i \neq j. \quad (6.53)$$

这里, 我们又一次利用了 b_{ij} 与守恒量 $|\mathbf{U}|^2$ 的正交性以及当 $i \neq j$ 时, $(U_i U_j, \beta |\mathbf{U}|^2)_H = 0$.

注意到 (6.51) 式, 由 (6.49) 式类似地有

$$\begin{aligned} p'_{ii} &= -\frac{1}{nkT} \sum_{l=1}^3 (\tilde{b}_{ii}, b_{ll})_H S_{ll} \\ &= -\frac{1}{nkT} \sum_{l=1}^3 (M U_i^2, b_{ll})_H S_{ll}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

此外, 由 b_u 的表达式 (6.35) 及 (6.24) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 (MU_i^2, b_{ll})_H S_{ll} &= (MU_i^2, M\beta U_i^2)_H S_{ii} \\ &+ \sum_{l \neq i} (MU_i^2, M\beta U_l^2)_H S_{ll} - \frac{1}{3} (MU_i^2, M\beta |\mathbf{U}|^2)_H \operatorname{div} \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

由 (6.53) 式容易看出

$$(MU_i^2, M\beta U_l^2)_H = nkT\mu, \quad \text{若 } i \neq l \quad (6.56)$$

及

$$-(MU_i^2, M\beta |\mathbf{U}|^2)_H = -nkT\delta - 2nkT\mu, \quad (6.57)$$

其中

$$\delta = \frac{M^2}{nkT} (U_i^2, \beta U_i^2)_H, \quad (6.58)$$

且上式右端显然与 i 无关. 这样, 由 (6.54) 式容易得到

$$\begin{aligned} p'_{ii} &= -\delta S_{ii} - \mu \sum_{l \neq i} S_{ll} + \frac{1}{3} (\delta + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{V} \\ &= -(\delta - \mu) S_{ii} + \frac{1}{3} (\delta - \mu) \operatorname{div} \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

下面进一步给出 δ 及 μ 的表达式. 在 (6.58) 式中取 $i = 3$, 并注意内积 $(\cdot, \cdot)_H$ 的定义 (6.27) 及 $f^{(0)}$ 的定义 (5.1), 有

$$\delta = \frac{M}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{M}{kT} \right)^{\frac{5}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \beta(T, |\mathbf{U}|) U_3^4 e^{-\frac{M|\mathbf{U}|^2}{2kT}} d\mathbf{U}. \quad (6.60)$$

利用球面坐标 $U_1 = r \cos \phi \sin \theta$, $U_2 = r \sin \phi \sin \theta$, $U_3 = r \cos \theta$ 计算上述积分, 就得到

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{M}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{M}{kT} \right)^{\frac{5}{2}} \int_0^\infty \beta(T, r) r^6 e^{-\frac{Mr^2}{2kT}} dr \\ &\quad \cdot \int_0^\pi \cos^4 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{2}{5\sqrt{2\pi}} kT \int_0^\infty \beta \left(T, \sqrt{\frac{kT}{M}} r \right) r^6 e^{-\frac{r^2}{2}} dr. \quad (6.61)\end{aligned}$$

再由 μ 与 δ 的表达式 (6.53) (其中分别取 $i = 1$ 及 2) 及 (6.58) (其中取 $i = 1, j = 2$), 易知有

$$\begin{aligned}& 2(\delta - \mu) \\ &= \frac{M^2}{nkT} \int_{\mathbb{R}^3} \beta(T, |\mathbf{U}|) (U_1^4 + U_2^4 - 2U_1^2 U_2^2) f^{(0)} dU \\ &= \frac{M^2}{nkT} \int_{\mathbb{R}^3} \beta(T, |\mathbf{U}|) (U_1 - U_2)^2 (U_1 + U_2)^2 f^{(0)} dU.\end{aligned} \quad (6.62)$$

在上述积分中作正交变换

$$U_1^* = \frac{\sqrt{2}}{2}(U_1 - U_2), \quad U_2^* = \frac{\sqrt{2}}{2}(U_1 + U_2), \quad U_3^* = U_3,$$

并注意到 μ 的表达式 (6.53), 就得到

$$\begin{aligned}2(\delta - \mu) &= \frac{4M^2}{nkT} \int_{\mathbb{R}^3} \beta(T, |\mathbf{U}^*|) U_1^{*2} U_2^{*2} f^{(0)} dU^* \\ &= 4\mu.\end{aligned} \quad (6.63)$$

由此立即得到

$$\mu = \frac{1}{3}\delta. \quad (6.64)$$

再利用 (6.61) 式, 就得到

$$\mu = \frac{2}{15\sqrt{2\pi}} kT \int_0^\infty \beta \left(T, \sqrt{\frac{kT}{M}} r \right) r^6 e^{-\frac{r^2}{2}} dr. \quad (6.65)$$

尽管并未给出函数 $\beta(T, |\mathbf{U}|)$ 的确切形式, 但由上式已经可以看出: 粘性系数 μ 只依赖于绝对温度 T .

利用 (6.63) 式, 由 (6.59) 式即得

$$p'_{ii} = -2\mu \left(S_{ii} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.66)$$

联合上式与 (6.52) 式, 就得到

$$p'_{ij} = -2\mu \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (6.67)$$

从而由 (6.44) 式, 就得到本构方程

$$p_{ij} = p \delta_{ij} - 2\mu \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (6.68)$$

这与第二章 (2.20) 式对粘性热传导流所给出的本构方程在膨胀粘性系数 $\mu' = 0$ 时的形式是完全一致的. 要注意的是, 在那里 (p_{ij}) 表示应力张量, 而在这里同样的记号 (p_{ij}) 则表示压力张量, 它们之间相差一个符号. 此外, 这儿得到相应于膨胀粘性系数为零时的结论, 与我们假定所讨论的气体分子没有内部结构是相关的.

在上述讨论中并未给出函数 $\alpha(T, |\mathbf{U}|)$ 和 $\beta(T, |\mathbf{U}|)$ 的确切形式, 因此, (6.43) 和 (6.65) 式并未具体给出计算导热系数和粘性系数的公式. 深入的讨论可以进一步给出有关的近似计算公式, 而且其计算结果可以达到与实验值相当接近的程度. 有兴趣的读者可参阅本章后所列的参考文献 (例如 [1], [4]).

§7. 伏拉索夫 (Vlasov) 方程及耦合方程组

7.1. 伏拉索夫方程

对由玻尔兹曼方程所描述的气体分子群体而言, 其粒子 (分子) 之间, 除了碰撞 (近程作用力) 之外没有其它的作用力, 任何一个粒子在不发生碰撞时的运动状态完全是独立的. 如果对所研究的粒子群体, 其中的粒子之间存在着长程的作用力, 而它们之间的相互碰撞却很少发生, 可以忽略, 这时玻尔兹曼方程就不再适用. 例如在等离子体 (见第三章) 中, 由于带电粒子间作用的库仑力是一种长程力, 任一带电粒子在任何时刻都与其它粒子发生相互作用, 而不可能存在独立的运动状态. 此外, 对宇宙星系而言, 其星体之间由于 (长程的) 引力而相互作用, 也有类似的情况. 这些都是与玻尔兹曼方程成立的条件相违背的. 但在许多情况下, 可以近似地认为粒子之间相互作用的结果, 相当于引入一个平均外加力场: 每个粒子在该场的作用下运动, 而这个平均场又由全部粒子的运动状态所决定. 这样, 用一个平均的外加力场来代替粒子间的长程相互作用, 就使我们可以继续利用玻尔兹曼方程的基本框架来处理有关的问题.

现讨论一个粒子群体, 其粒子之间的相互作用力是长程的, 且设无碰撞发生. 设由全体粒子运动状态所决定的平均力场对每个粒子 (单位质量上) 的作用力为 $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$. 由 §2 中的推导可知, 粒子的分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 应满足以下方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{g} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \quad (7.1)$$

这个方程称 伏拉索夫方程. 它作为玻尔兹曼方程的一种特殊形式, 是等离子体研究中的基本方程之一.

7.2. 伏拉索夫 - 泊松 (Vlasov-Poisson) 方程组

现在考察带电粒子群体 (如等离子体中的电子群体等) 的运动情况. 假定过程进行得不太快, 使电磁效应可以忽略, 即可作静电近似. 设粒子的质量为 M , 所带电荷为 q , 并设这些带电粒子形成的 (平均) 电场为 $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$. 这样, 由于磁场已被忽略, 一个粒子单位质量上受到的电场力为 $\mathbf{g} = \frac{q}{M} \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$. 因此, 这些带电粒子的分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 应满足伏拉索夫方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{q}{M} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \quad (7.2)$$

由麦克斯韦方程组, 此时尽管 \mathbf{E} 并非静电场, 但高斯定理仍然成立 (见第一章 (3.9) 式), 即有

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (7.3)$$

其中 ε_0 为真空中的介电常数, ρ 为电荷密度. 再由分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 的定义, 电荷密度即单位体积中的电荷为

$$\rho(t, \mathbf{x}) = q \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (7.4)$$

在静电近似下, 可以 $\phi(t, \mathbf{x})$ 表示电场 \mathbf{E} 的势:

$$\mathbf{E} = -\nabla_{\mathbf{x}} \phi, \quad (7.5)$$

于是, 注意到 (7.4) 式, 方程 (7.2) - (7.3) 可写为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f - \frac{q}{M} \nabla_{\mathbf{x}} \phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \quad (7.6)$$

及

$$-\Delta \phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (7.7)$$

这个方程组称为 伏拉索夫 - 泊松方程组.

下面我们具体考察将伏拉索夫 - 泊松方程组 (7.6) — (7.7) 应用于无外加磁场的高温等离子体的情形. 如果过程的频率不是太低, 可以认为正离子是不动的, 且构成一个在空间均匀分布的正电荷背景. 设 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 表示等离子体中电子的分布函数, 而对电子而言, $q = -e$. 考虑到上述均匀分布的正电荷背景, 决定电场的电荷并不仅仅由电子提供, 还应包括由正离子给出的正电荷. 正电荷的密度可写为

$$e \int_{\mathbb{R}^3} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (7.8)$$

其中 $f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 为由 (3.33) 式给出的麦克斯韦 - 玻尔兹曼分布 (在其中 $\mathbf{v}_0 = 0$). 这样, 总的电荷密度应为

$$\rho(t, \mathbf{x}) = -e \int_{\mathbb{R}^3} (f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) d\mathbf{v}. \quad (7.9)$$

于是, 伏拉索夫 - 泊松方程组 (7.6) — (7.7) 此时应修正为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{e}{M} \nabla_{\mathbf{x}} \phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \quad (7.10)$$

及

$$\Delta \phi = \frac{e}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} (f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) d\mathbf{v}. \quad (7.11)$$

如果对所讨论的粒子群体, 其粒子之间只存在 (长程的) 引力作用, 那么, 其粒子分布函数 f 与引力场的势 ϕ 也满足类似于 (7.6) — (7.7) 的伏拉索夫 - 泊松方程组 (见习题 5).

7.3. 伏拉索夫 - 麦克斯韦 (Vlasov-Maxwell) 方程组

一般地说, 在运动的带电粒子群体 (如等离子体) 中, 磁场效应是不能忽略的 (见第三章). 在这种情况下, 带电粒子群体就

处在由全体粒子的宏观运动所产生的电磁场中. 这时, 就需要对上段所述的伏拉索夫-泊松方程组予以修正.

仍设粒子的质量为 M , 电荷为 q . 又设电磁场的电场强度与磁感强度分别为 $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ 与 $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$. 由电磁场中的洛伦兹力公式 (见第一章 (3.19) 式), 一个带电粒子所受的力为

$$q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (7.12)$$

因此, 粒子的分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 所满足的伏拉索夫方程 (7.1) 变为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{q}{M} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \quad (7.13)$$

同时, 为简单起见, 假设电场强度 \mathbf{E} 与磁感强度 \mathbf{B} 满足真空中的麦克斯韦方程组 (见第一章 (3.9) - (3.12) 式)

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot} \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}, \quad (7.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot} \mathbf{E}, \quad (7.15)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (7.16)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (7.17)$$

其中 ρ 为电荷密度, \mathbf{j} 为电流密度, 而 ε_0 及 μ_0 分别为真空中的介电常数及磁导率. 电荷密度 ρ 可利用分布函数 f 由下式给出:

$$\rho(t, \mathbf{x}) = q \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (7.18)$$

下面再利用分布函数 f 来决定电流密度 \mathbf{j} . 电流是由带电粒子群体的宏观运动形成的, 而带电粒子的宏观运动速度就是粒子的平均速度 (见 (2.5) 式)

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}.$$

由定义 (见第一章 §2.2.1), 电流密度 \mathbf{j} 的方向与 \mathbf{V} 相同, 其数值等于单位时间内通过垂直于 \mathbf{V} 方向的单位面积的电荷量. 由于单位时间内通过垂直于 \mathbf{V} 方向的单位面积的粒子数为 $n|\mathbf{V}|$, 易知电流密度

$$\mathbf{j} = q \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (7.19)$$

由方程 (7.13) – (7.19) 构成的方程组由描述粒子守恒的伏拉索夫方程及描述电磁场变化的麦克斯韦方程组耦合而成, 称为 伏拉索夫 – 麦克斯韦方程组.

在讨论伏拉索夫 – 麦克斯韦方程组的定解问题的提法之前, 我们先根据物理上的启示, 证明与该方程组的解有关的两个性质.

设粒子所处的范围为全空间 \mathbb{R}^3 , 则粒子总数为

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v}. \quad (7.20)$$

由粒子数守恒, 这个量应不随时间 t 而变. 具体地说, 我们有下述

定理 7.1. 设 $(f, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ 为伏拉索夫 – 麦克斯韦方程组 (7.13) – (7.19) 在 $t \geq 0$ 时的 C^1 解, 且关于变量 \mathbf{x} 及 \mathbf{v} 具有紧支集, 则

$$N = \text{常数}, \quad \forall t \geq 0, \quad (7.21)$$

其中 N 由 (7.20) 式给出.

证明 利用方程 (7.13), 由 (7.20) 式可得

$$\frac{dN}{dt} = - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{q}{M} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f \right) d\mathbf{x} d\mathbf{v}. \quad (7.22)$$

由于 f 关于 \mathbf{x} 及 \mathbf{v} 具有紧支集, 利用格林公式, 并注意到 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 都只是 t 及 \mathbf{x} 的函数, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0, \quad (7.23)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0 \quad (7.24)$$

及

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f d\mathbf{x} d\mathbf{v} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}_{\mathbf{v}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) f d\mathbf{x} d\mathbf{v} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{B} \cdot \operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \mathbf{v}) f d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0, \end{aligned} \quad (7.25)$$

其中 $\operatorname{div}_{\mathbf{v}}$ 及 $\operatorname{rot}_{\mathbf{v}}$ 分别表示关于变量 \mathbf{v} 取散度及旋度. 在得到 (7.25) 式的过程中, 我们利用了向量分析公式

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b} \quad (7.26)$$

及 $\operatorname{rot}_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = 0$. 将 (7.23)–(7.25) 式代入 (7.22) 式右端, 即得

$$\frac{dN}{dt} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

这就证明了定理的结论.

现在考察带电粒子群体的总能量. 由 (2.11) 式, 单位体积中粒子的平均总动能为

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2} |\mathbf{v}|^2 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v};$$

而由第一章 §4.1, 单位体积中粒子的电磁能量即电磁能量密度为

$$\frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right).$$

于是总能量为

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M}{2} |\mathbf{v}|^2 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right) d\mathbf{x}. \quad (7.27)\end{aligned}$$

由能量守恒, 这个量也应该不随时间而变. 具体地说, 我们有下述

定理 7.2. 设 $(f, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ 为伏拉索夫-麦克斯韦方程组 (7.13)---(7.19) 在 $t \geq 0$ 时的 C^1 解, 且关于变量 \mathbf{x} 及 \mathbf{v} 具有紧支集, 则

$$\mathcal{E} = \text{常数}, \quad \forall t \geq 0, \quad (7.28)$$

其中 \mathcal{E} 由 (7.27) 式给出.

证明 将方程 (7.13) 两端乘以 $|\mathbf{v}|^2$, 再关于 \mathbf{x} 与 \mathbf{v} 在全空间积分, 有

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\mathbf{v}|^2 \frac{\partial f}{\partial t} + |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f) \right) d\mathbf{x} d\mathbf{v} \\ = & - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q}{M} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f d\mathbf{x} d\mathbf{v}. \quad (7.29)\end{aligned}$$

注意到 f 关于 \mathbf{x} 及 \mathbf{v} 具有紧支集, 利用格林公式, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0 \quad (7.30)$$

及

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q}{M} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f d\mathbf{x} d\mathbf{v} \\ = & - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} 2 \frac{q}{M} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f d\mathbf{x} d\mathbf{v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q}{M} |\mathbf{v}|^2 \operatorname{div}_v (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) f dx dv \\
= & -2 \frac{q}{M} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} f dx dv \\
= & -\frac{2}{M} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dx. \tag{7.31}
\end{aligned}$$

在得到上式的过程中, 我们利用了

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad \operatorname{div}_v (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$

及方程 (7.19). 将 (7.30) 和 (7.31) 式代入 (7.29) 式, 并利用方程 (7.14), 即得

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 f dx dv \\
= & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^2 \frac{\partial f}{\partial t} dx dv \\
= & \frac{2}{M} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dx \\
= & \frac{2}{M} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dx \\
= & -\frac{1}{M} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 dx + \frac{2}{M} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} dx. \tag{7.32}
\end{aligned}$$

因为 \mathbf{E} 及 \mathbf{B} 关于 \mathbf{x} 具有紧支集, 利用向量分析公式 (7.26) 和格林公式不难验证

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} dx = \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} dx.$$

这样, 注意到方程 (7.15), (7.32) 式可改写为

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} M |\mathbf{v}|^2 f dx dv + \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 dx \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} dx \\
&= -2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} dx \\
&= -\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 dx.
\end{aligned}$$

由上式立即有

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (7.33)$$

这就证明了定理的结论.

7.4. 伏拉索夫耦合方程组的数学结构及其定解问题

在伏拉索夫-泊松方程组中, 方程 (7.6) 是一个关于未知函数 f 的一阶双曲型偏微分方程, 其系数依赖于另一未知函数 ϕ 对 \mathbf{x} 的梯度, 而方程 (7.7) 则是关于未知函数 ϕ 的泊松方程, 其右端由未知函数 f 的积分给出. 因此, 该方程组是一个非线性双曲-椭圆耦合的积分微分方程组.

下面着重考察伏拉索夫-麦克斯韦方程组. 首先指出, 该方程组中的方程 (7.16) 和 (7.17) 可化为对初始资料的要求. 精确地说, 如果 $t = 0$ 时

$$f = f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^0(\mathbf{x}), \quad (7.34)$$

且这些初始资料满足相容性条件

$$\operatorname{div} \mathbf{E}^0 = \frac{q}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (7.35)$$

及

$$\operatorname{div} \mathbf{B}^0 = 0. \quad (7.36)$$

那么在 $t > 0$ 时恒成立

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (7.37)$$

及

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (7.38)$$

实际上, 以散度算子 div 作用于方程 (7.15) 的两端, 并注意到 $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, 就有

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (7.39)$$

于是, 由 (7.36) 式立刻可得 (7.38) 式. 再以散度算子 div 作用于方程 (7.14) 的两端, 并注意到 (7.19) 式, 类似地有

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} &= -\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{j} \\ &= -\mu_0 q \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}_x (\mathbf{v} f) d\mathbf{v} \\ &= -\mu_0 q \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} \cdot \nabla_x f d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

再利用伏拉索夫方程 (7.13), 就得到

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} = \mu_0 q \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \mu_0 \frac{q^2}{M} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f d\mathbf{v}. \quad (7.41)$$

注意到在 $|\mathbf{v}| \rightarrow \infty$ 时, 我们总是假定 f 以足够快的速率趋向于零, 类似于 (7.24) 和 (7.25) 式, 利用格林公式容易验证

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f d\mathbf{v} = 0. \quad (7.42)$$

于是, (7.41) 式可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{q}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \right) = 0. \quad (7.43)$$

这样, 由 (7.35) 式就立刻得到 (7.39) 式.

因此, 对伏拉索夫-麦克斯韦方程组来说, 我们只需考虑由方程 (7.13)–(7.15) 及 (7.19) 构成的方程组. 前已说明, 伏拉索夫方程 (7.13) 为关于未知函数 f 的一阶双曲型偏微分方程, 其系数依赖于未知函数 \mathbf{E} 及 \mathbf{B} , 而麦克斯韦方程组 (7.14)–(7.15) 则是关于未知函数 \mathbf{E} 及 \mathbf{B} 的一阶对称双曲型方程组 (见第一章 §5), 但其中 \mathbf{j} 由未知函数 f 的积分通过 (7.19) 式给出. 这样, 伏拉索夫-麦克斯韦方程组是一个一阶非线性双曲型积分-偏微分方程组.

最后, 我们讨论上述这些耦合方程组的定解问题的提法. 由于在原则上, 伏拉索夫-泊松方程组中的未知函数 ϕ 可按泊松方程的情形提定解条件, 伏拉索夫-麦克斯韦方程组中的未知函数 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 可按麦克斯韦方程组的情形提定解条件 (见第一章), 所以这里只需重点讨论伏拉索夫方程 (7.1) 的定解条件的提法.

伏拉索夫方程 (7.1) 的定解问题仍可分为初值问题及初-边值问题两类.

1) 初值问题 (柯西问题): 设 $T > 0$, 在 $(0, T) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 中求方程 (7.1) 的解 $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, 使其在 $t = 0$ 时满足初始条件

$$f(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (7.44)$$

其中 $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 为给定的函数.

下述常微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} \quad (7.45)$$

的任一解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ 称为伏拉索夫方程 (7.1) 的特征线. 由 (7.1) 式, 沿任一特征线, 分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 保持常值. 因此, 分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 具有与初始分布 $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 同样的上下界. 对于伏拉索夫方程 (7.13), 特征线方程 (7.45) 变为

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{M}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (7.46)$$

这正是带电粒子在电磁场中运动的动力学方程 (参见第一章 (3.19) 式). 顺便说明, 在不少的实际问题中, 粒子的运动速度可能相当地大, 这就要求对伏拉索夫方程按相对论的要求进行修正 (参见第九章习题 13 及 14).

2) 初-边值问题: 设 $T > 0$ 及 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 在 $(0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3$ 中求方程 (7.1) 的解 $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, 使其在 $t = 0$ 时满足初始条件

$$f(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \Omega \times \mathbb{R}^3, \quad (7.47)$$

并在边界 $\Gamma = \partial\Omega \times \mathbb{R}^3$ 的某一部分上满足一定的边界条件. 这里指出, 变量 \mathbf{v} 的变化范围总是全空间 \mathbb{R}^3 .

为了说明应该在边界 Γ 的哪一部分上给出边界条件, 并应给出什么形式的边界条件, 我们先从数学的角度来考察一个简单的例子.

例 7.1. 讨论如下的一维伏拉索夫方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad t > 0, x > 0, v \in \mathbb{R}. \quad (7.48)$$

设在 $t = 0$ 时给定初始条件

$$f(0, x, v) = f^0(x, v), \quad x > 0, v \in \mathbb{R}. \quad (7.49)$$

其中 $f^0(x, v)$ 为已知函数.

方程 (7.48) 的特征线 $x = x(t)$, $c = v(t)$ 满足

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = g. \quad (7.50)$$

由 (7.48) 式, 沿任一特征线满足

$$\frac{df}{dt} = 0. \quad (7.51)$$

为简单起见, 假设 $g \equiv 0$. 这样, 在 (t, x, v) 空间过点 $(0, \alpha, \beta)$ 的特征线为直线

$$x = \beta t + \alpha, \quad v = \beta, \quad (7.52)$$

且沿此特征线

$$f = f^0(\alpha, \beta) = f^0(x - vt, v). \quad (7.53)$$

现在 t 增加时考察该特征线的指向. 由 (7.52) 式不难看出: 若 $\beta > 0$, 特征线指向 x 增加的方向, 从而在区域边界 $x = 0$ 上, 特征线指向求解区域的内部; 若 $\beta < 0$, 特征线指向 x 减少的方向, 从而在区域边界 $x = 0$ 上, 指向求解区域的外部. 因此, 由 (7.53) 式, 利用在 $x > 0$ 及 $v \in \mathbb{R}$ 上给出的初始条件 (7.49), 能且仅能在区域

$$t > 0, \quad x > 0, \quad v \leq 0 \quad (7.54)$$

及

$$t > 0, \quad x > vt, \quad v > 0 \quad (7.55)$$

中决定解

$$f = f^0(x - vt, v). \quad (7.56)$$

为了决定解 f 在区域

$$t > 0, \quad 0 \leq x < vt, \quad v > 0 \quad (7.57)$$

中的值, 就必须在边界 $x = 0, v > 0$ 处, 给出适当的边界条件. 例如, 设在这一部分边界上给定边界条件

$$f(t, 0, v) = g^0(t, v), \quad \text{当 } v > 0 \text{ 时.} \quad (7.58)$$

注意到过 $t = \tau, x = 0, v = \beta$ 的特征线为

$$x = \beta(t - \tau), \quad v = \beta, \quad (7.59)$$

而沿此特征线成立

$$f = g^0(\tau, \beta), \quad (7.60)$$

就可以决定 f 在区域 (7.57) 中的值

$$f = g^0\left(t - \frac{x}{v}, v\right). \quad (7.61)$$

这样, 我们就得到了定解问题 (7.48) – (7.49) 及 (7.58) 的解. 当然如果要得到连续、甚至光滑的解, $f^0(x, v)$ 与 $g^0(t, v)$ 还应满足一定的相容性条件.

由上述例子可见, 形如 (7.58) 的边界条件只需给在满足

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0 \quad (7.62)$$

的部分边界上, 其中 \mathbf{n} 表示区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法线向量.

此外, 仔细考察对上例的讨论不难看出: 在所论区域的另一部分边界上, 即 $v < 0$ 时, 给出如下形式的边界条件

$$f(t, 0, v) = f(t, 0, -v), \quad \text{当 } v < 0 \text{ 时,} \quad (7.63)$$

而在相应于 $v > 0$ 的那一部分边界上不再给出边界条件, 仍可唯一地确定方程的解 f 在整个求解区域上的值. 形如 (7.63) 的边界条件相应于粒子在边界上的镜面反射 (参见下面的 (7.68) 式). 这种反射当然只能产生于满足

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} > 0 \quad (7.64)$$

的那部分边界上.

现在讨论一般的情况. 记

$$\Gamma_- = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \in \Gamma, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} < 0\}, \quad (7.65)$$

其中 \boldsymbol{n} 为 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法线向量. 在 Γ_- 上, 由于粒子速度 \boldsymbol{v} 的方向指向求解区域内部, 故有粒子由外部进入到求解区域内部. 此时应给出向区域内发射粒子的分布函数, 因此边界条件应具有以下形式:

$$f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = f_b(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}), \quad t > 0, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \in \Gamma_-, \quad (7.66)$$

其中 $f_b(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 为给定的函数.

下面讨论边界为固壁的情况. 一般地说, 气体 (或其它粒子群体) 在固壁情形的边界层非常复杂. 气体分子在边界层可能被反射、被吸收, 甚至可能形成化学键并分离变成离子. 其状态非但依赖于边界的温度, 而且依赖于边界的光洁程度. 这方面的理论分析与实验数据都还很不充分. 一种理想的情形是气体在固壁边界作镜面反射. 设在边界上一分子的入射速度为 \boldsymbol{v} , 经边界镜面反射, 其速度变为

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - 2(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}, \quad (7.67)$$

(见图 7). 因为入射速度 \boldsymbol{v} 与反射速度 \boldsymbol{v}' 总是成对出现的, 所以相应的边界条件应为

$$f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} - 2(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}), \quad t > 0, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \in \Gamma_+, \quad (7.68)$$

其中

$$\Gamma_- = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \Gamma, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0\}. \quad (7.69)$$

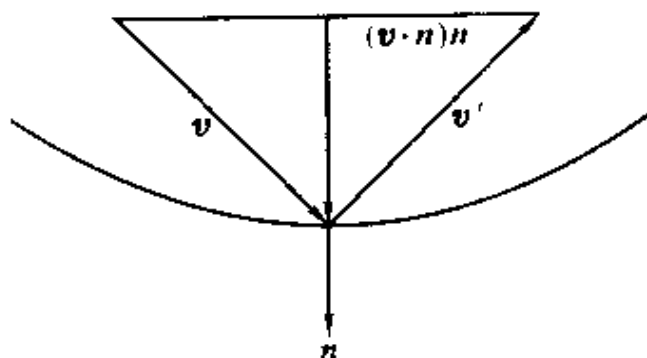


图 7

伏拉索夫—泊松方程组及伏拉索夫—麦克斯韦方程组的定解问题也是近十多年来应用偏微分方程领域中的一个热门研究课题. 对伏拉索夫—麦克斯韦方程组 (包括相对论及非相对论两种情形), 在小初值情况下已证明了其柯西问题整体经典解的存在性 (见 [8]), 但对一般初值情况, 仍是一个没有解决而值得深入研究的问题. 其整体弱解的存在性也已得到 (见 [9]), 但弱解的唯一性尚未解决. 顺便指出, 对具有一般碰撞项的玻尔兹曼方程柯西问题整体弱解的存在性感兴趣的读者, 可参见 [10].

习 题

1. 设气体分子是半径为 r 的刚体球, 试求分子刚体碰撞的微分散射截面, 并证明其总截面 $\sigma_{\text{tot}} = 4\pi r^2$.

2. 设 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 为玻尔兹曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = J$$

的 C^1 解, 且对任何 $t \geq 0$, f 关于变量 \mathbf{x} 及 \mathbf{v} 是紧支集的. 证明: 积分

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) |\mathbf{x} - t\mathbf{v}|^2 dx dv$$

为一个与 $t \geq 0$ 无关的常数.

3. 设 \tilde{J} 为由 (6.13) 式定义的希尔伯特空间 H 中的积分算子. 证明该算子为非负的自共轭算子.

4. 利用 $\tilde{a}_i, \tilde{b}_{ij}$ 的表达式 (6.24), 直接证明 (6.33) 式对一切守恒量 λ 成立.

5. 设粒子群体的粒子之间受引力 (长程作用力) 的作用, 且可忽略碰撞. 证明粒子的分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 与引力场的势 $\phi(t, \mathbf{x})$ 满足如下的伏拉索夫-泊松方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\mathbf{x}} \phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f &= 0, \\ -\Delta_{\mathbf{x}} \phi &= \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

6. 设 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 为由伏拉索夫-麦克斯韦方程组决定的粒子的连续可微的分布函数, 且对任何 $t \geq 0$, f 关于变量 \mathbf{x} 及 \mathbf{v} 是紧支集的. 又设 ϕ 为光滑函数, 且 $\phi(0) = 0$. 证明: 积分

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \phi(f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) dx dv$$

为一个不随时间 $t \geq 0$ 变化的常量.

7. 求解一维伏拉索夫方程的柯西问题:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial v} &= 0, \quad t > 0, (x, v) \in \mathbb{R}^2, \\ f(0, x, v) &= f^0(x, v), \end{aligned}$$

其中 g 为常数, $f^0(x, v)$ 为给定的适当光滑函数.

8. 求解下述一维伏拉索夫方程的边值问题:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \quad t > 0, x > 0, v \in \mathbb{R}, \\ f(0, x, v) &= f^0(x, v), \quad x > 0, v \in \mathbb{R}, \\ f(t, 0, v) &= f(t, 0, -v), \quad t > 0, v < 0,\end{aligned}$$

其中 $f^0(x, v)$ 为给定的适当光滑函数, 并满足相容性条件

$$f^0(0, v) = f^0(0, -v), \quad v < 0.$$

参考文献

- [1] 小邦德 J W, 沃森 K M, 小韦尔奇 J A. 气体动力学原子理论. 傅仙罗译. 北京: 科学出版社, 1986
- [2] Chapman S, Cowling T G. *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. Cambrige: Cambrige University Press, 1958
- [3] Cercignani C. *The Boltzmann Equation and Its Applications*. New York: Springer-Verlag, 1988
- [4] McLennan J A. *Introduction to Non-Equilibrium Statistical Mechanics*. New Jersey: Printice Hall, 1989
- [5] 霍裕平, 郑久仁著. 非平衡态统计理论. 北京: 科学出版社, 1987

- [6] Strauss W. A. *Nonlinear Wave Equations*. Providence: American Mathematical Society, 1989
- [7] Lions P. L. *Modèles Mathématiques des Phénomènes de Transport*. Paris: Ecole Polytechnique, 1994
- [8] Glassey R. T., Strauss W. A. *Absence of shocks in an initial dilute, collisionless plasma*. Comm. Math. Phys., 113(1987). 191~208
- [9] Lions P. L., DiPerna R. *Global solutions of Vlasov-Maxwell system*. Comm. Pure Appl. Math., 42(1989). 729~757
- [10] DiPerna R., Lions P. L. *On the Cauchy problem for Boltzmann equations: Global existence and weak stability results*. Annals of Math., 130(1989). 321~366