$0 < m \leqslant |\varphi(x,y)| \leqslant M$($m,M$ 为常数)；

(3) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\varphi(x,y)$满足与上题同样的条件；

(4) $\displaystyle\iint\limits_{[0,a]\times[0,a]} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^p}$；

(5) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}$。

2. 计算下列反常重积分：

(1) $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p y^q}$，其中 $D=\{(x,y)\mid xy\geqslant 1, x\geqslant 1\}$，且 $p>q>1$；

(2) $\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(3) $\displaystyle\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

3. 设 D 是由第一象限内的抛物线 $y=x^2$，圆周 $x^2+y^2=1$ 以及 x 轴所围的平面区域，证明 $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 收敛。

4. 判别反常重积分

$$I=\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

是否收敛。如果收敛，求其值。

5. 设 $F(t)=\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ 0\leqslant y\leqslant t}} \mathrm{e}^{-\frac{tx}{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $F'(t)$。

6. 设函数 $f(x)$在$[0,a]$上连续，证明：

$$\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant a} \frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^a f(x)\mathrm{d}x 。$$

7. 计算积分 $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$。

§5 微分形式

有向面积与向量的外积

前面导出二重积分变量代换公式

$$\iint_{T(D)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

时已经指出,加了绝对值号的 Jacobi 行列式 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 的几何意义是 xy 平面上的面积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 uv 平面上的面积微元 $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 之间的比例系数。那么,不加绝对值号的 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 的几何意义又是什么呢? 一个顺理成章的回答应该是,它代表带符号的面积微元之间的比例系数。

带符号的面积称为**有向面积**。下面我们从最简单的平行四边形出发,给出一个定义有向面积的例子。

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ 为平面 $\mathbf{R}^2$ 上两个线性无关向量,Π 为 $\mathbf{R}^2$ 上由向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所张成的平行四边形,我们规定:如果从向量 $\boldsymbol{a}$ 出发在 Π 中旋转到 $\boldsymbol{b}$ 是逆时针方向(即 $\boldsymbol{a}$ 的方向, $\boldsymbol{b}$ 的方向和指向读者的方向成右手定则,见图 13.5.1),这个平行四边形的面积为正,否则为负。

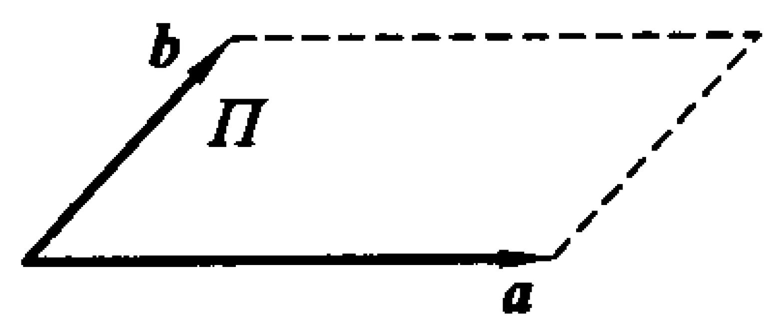

图 13.5.1

容易看出,二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 正是由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所张成的平行四边形 Π 的有向面积:由解析几何知道,它的绝对值就是 Π 在普通意义下的面积。将这两个向量用极坐标表示为

$$\boldsymbol{a}=(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1), \quad \boldsymbol{b}=(r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2),$$

若从 $\boldsymbol{a}$ 出发在 Π 中旋转到 $\boldsymbol{b}$ 是逆时针方向的,则有 $\theta_1<\theta_2<\theta_1+\pi$,因此

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = r_1r_2(\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2)=r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)>0。$$

与 Π 的有向面积的符号规定一致。此外,若交换 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的位置,即从 $\boldsymbol{a}$ 出发在 Π 中旋转到 $\boldsymbol{b}$ 是顺时针方向的,则结果反号。

我们将这种运算称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**外积**,记为 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}。$$

易验证外积运算具有以下性质:

(1) 反称性

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^2,$$

因此立即得出

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}=0,\quad \boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^2。$$

(2) 双线性(分配律)

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c},\\(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c},\\(\lambda\boldsymbol{a})\wedge\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\wedge(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}),\end{array}\right.\qquad \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^2,\lambda\in\mathbf{R}。$$

例 13.5.1 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上的一组基(不一定要求正交),

$$\boldsymbol{a}_1=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{12}\boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{a}_2=a_{21}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2$$

是 $\mathbf{R}^2$ 中的任意两个向量,那么由外积的性质得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2&=(a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{12}\boldsymbol{e}_2)\wedge(a_{21}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2)\\&=a_{11}a_{21}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_1+a_{11}a_{22}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2+a_{12}a_{21}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1+a_{12}a_{22}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_2\\&=a_{11}a_{22}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2+a_{12}a_{21}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1\\&=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2。\end{aligned}$$

上式两端的 $\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$ 分别表示由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 所张成的平行四边形的有向面积,而行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$ 就是这两个有向面积之间的比例系数。若行列式大于零,说明这两个有向面积的符号相同,即从 $\boldsymbol{e}_1$ 到 $\boldsymbol{e}_2$ 的旋转方向与从 $\boldsymbol{a}_1$ 到 $\boldsymbol{a}_2$ 的旋转方向相同;若行列式小于零,说明这两个有向面积的符号相反,即从 $\boldsymbol{e}_1$ 到 $\boldsymbol{e}_2$ 的旋转方向与从 $\boldsymbol{a}_1$ 到 $\boldsymbol{a}_2$ 的旋转方向相反。

微分形式

从例 13.5.1 得到启发,若能将重积分变量代换公式中的微元关系

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

写成形式

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,$$

而 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$ 理解为带符号的面积微元,使上式成立,就无须对变量代换的 Jacobi 行列式取绝对值了。但是,这里的 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$(或 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$)并非向量,因此需要引入微分形式和外积的概念。

我们已经学过,一个可微函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全微分为

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i。$$

它是函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$对应于自变量的增量 $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$ 而产生的相应增量的一阶近似，而且它是 $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$ 的线性组合。因此，如果将 $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$ 看作一个向量空间的基，是有其合理性的。下面我们构造这样的向量空间。

设 U 为 $\mathbf{R}^n$ 上的区域，记 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$C^1(U)$为 U 上具有连续偏导数的函数全体。将$\{dx_1, dx_2, \cdots, dx_n\}$看作一组基，其线性组合

$$a_1(\boldsymbol{x})dx_1 + a_2(\boldsymbol{x})dx_2 + \cdots + a_n(\boldsymbol{x})dx_n, \quad a_i(\boldsymbol{x}) \in C^1(U)(i = 1, 2, \cdots, n)$$

称为**一次微分形式**，简称 **1－形式**。1－形式的全体记为 Λ^1（严格地说应为 $\Lambda^1(U)$，下同。）

对于任意 $\omega, \eta \in \Lambda^1$：

$$\omega = a_1(\boldsymbol{x})dx_1 + a_2(\boldsymbol{x})dx_2 + \cdots + a_n(\boldsymbol{x})dx_n,$$

$$\eta = b_1(\boldsymbol{x})dx_1 + b_2(\boldsymbol{x})dx_2 + \cdots + b_n(\boldsymbol{x})dx_n,$$

我们分别定义 $\omega + \eta$ 和 $\lambda\omega(\lambda \in C^1(U))$为

$$\omega + \eta = (a_1(\boldsymbol{x}) + b_1(\boldsymbol{x}))dx_1 + (a_2(\boldsymbol{x}) + b_2(\boldsymbol{x}))dx_2 + \cdots + (a_n(\boldsymbol{x}) + b_n(\boldsymbol{x}))dx_n,$$

$$\lambda\omega = (\lambda(\boldsymbol{x})a_1(\boldsymbol{x}))dx_1 + (\lambda(\boldsymbol{x})a_2(\boldsymbol{x}))dx_2 + \cdots + (\lambda(\boldsymbol{x})a_n(\boldsymbol{x}))dx_n。$$

上述运算显然满足交换律、结合律以及对 $C^1(U)$的乘法分配律。若定义 Λ^1 中的“零元”为

$$0 = 0dx_1 + 0dx_2 + \cdots + 0dx_n,$$

而且定义 $-\omega$ 为

$$-\omega = (-a_1(\boldsymbol{x}))dx_1 + (-a_2(\boldsymbol{x}))dx_2 + \cdots + (-a_n(\boldsymbol{x}))dx_n,$$

那么 Λ^1 成为 $C^1(U)$上的向量空间。

进一步，在$\{dx_1, dx_2, \cdots, dx_n\}$中任取 2 个组成二元有序元，记为 $dx_i \wedge dx_j$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，称为 dx_i 与 dx_j 的外积（暂时先将它看作一种记号）。

仿照向量的外积，规定

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, \quad dx_i \wedge dx_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n。$$

因此共有 C_n^2 个有序元

$$dx_i \wedge dx_j, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n。$$

同 Λ^1 的构造类似，以这些有序元为基就可以构造一个 $C^1(U)$上的向量空间 Λ^2。Λ^2 的元素称为**二次微分形式**，简称 2－形式。于是 Λ^2 的元素就可表为

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} g_{ij}(\boldsymbol{x}) dx_i \wedge dx_j。$$

这称为 2－形式的标准形式。

例 13.5.2 在 $\mathbf{R}^3$ 上，Λ^2 的基为 $dx_1\wedge dx_2, dx_1\wedge dx_3$ 和 $dx_2\wedge dx_3$，而 $\mathbf{R}^3$ 上的 2-形式为

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} g_{ij}(\boldsymbol{x})dx_i\wedge dx_j。$$

一般地，在 $\{dx_1, dx_2, \cdots, dx_n\}$ 中任意选取 k 个组成有序元，记为

$$dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},$$

这里 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是从集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中选取的任意 k 个整数(同样地，我们也把 $\wedge$ 称为外积)。规定

$$dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}\wedge dx_{i_{r+1}}\cdots\wedge dx_{i_k} = -dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{r+1}}\wedge dx_{i_r}\cdots\wedge dx_{i_k},$$
$$1\leqslant r\leqslant k-1,$$

而且如果 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 中有两个是相同的，则规定 $dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}=0$。因此共有 C_n^k 个有序元

$$dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},\quad 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n。$$

以这些有序元为基构造一个 $C^1(U)$ 上的向量空间 Λ^k。Λ^k 的元素称为 **k 次微分形式**，简称 k-形式。于是一般 k-形式就可表示为

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} g_{i_1,i_2,\cdots,i_k}(\boldsymbol{x})dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}。$$

这称为 k-形式的标准形式。

特别地，Λ^n 是 $C^1(U)$ 上的 $C_n^n=1$ 维的向量空间，它的基为 $dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$，因此一般 n-形式为

$$g dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n,\quad g\in C^1(U)。$$

注意当 $k>n$ 时，$dx_{i_1}, dx_{i_2}, \cdots, dx_{i_k}$ 中必有两个是相同的，因此总有 $dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}=0$，即 $\Lambda^k=\{0\}$。

U 上的具有连续偏导数的函数称为 0-形式，它们的全体记为 Λ^0，它也是一个向量空间，函数 $g\equiv 1$ 是它的一个基。

例 13.5.3 在 $\mathbf{R}^3$ 上，

$$\omega = x_1 dx_2\wedge dx_1 - x_2 dx_3\wedge dx_2 + x_3 dx_2\wedge dx_3 + dx_1\wedge dx_2 + x_1^2 dx_1\wedge dx_3$$

的标准形式为

$$\omega = (1-x_1)dx_1\wedge dx_2 + x_1^2 dx_1\wedge dx_3 + (x_2+x_3)dx_2\wedge dx_3。$$

微分形式的外积

现在把 $dx_i\wedge dx_j$ 中的 $\wedge$ 理解为一种运算。先考虑任意 $\omega, \eta\in\Lambda^1$:

$$\omega = a_1(\boldsymbol{x})dx_1 + a_2(\boldsymbol{x})dx_2 + \cdots + a_n(\boldsymbol{x})dx_n,$$
$$\eta = b_1(\boldsymbol{x})dx_1 + b_2(\boldsymbol{x})dx_2 + \cdots + b_n(\boldsymbol{x})dx_n,$$

定义 ω 与 η 的外积为

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}) b_j(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \\ &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i(\boldsymbol{x}) b_j(\boldsymbol{x}) - a_j(\boldsymbol{x}) b_i(\boldsymbol{x})) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \\ &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \begin{vmatrix} a_i(\boldsymbol{x}) & a_j(\boldsymbol{x}) \\ b_i(\boldsymbol{x}) & b_j(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j,\end{aligned}$$

它是 Λ^2 中的元素。

显然,这样的外积定义可以推广到任意的 Λ^i 与 Λ^j 中去。为此,将前面的向量空间 $\Lambda^0, \Lambda^1, \cdots, \Lambda^n$ 合并为

$$\Lambda = \Lambda^0 + \Lambda^1 + \cdots + \Lambda^n,$$

则 Λ 是一个 $C^1(U)$ 上的 $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n$ 维的向量空间。它的基即为 $\Lambda^0, \Lambda^1, \cdots, \Lambda^n$ 中的基的全体,Λ 中的元素的一般形式为

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n, \quad \omega_i \in \Lambda^i, \quad i = 0, 1, \cdots, n。$$

现在在 Λ 上引入外积运算 $\wedge$:

记 $\mathrm{d}x_I = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}, \mathrm{d}x_J = \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}$。则 $\mathrm{d}x_I$ 与 $\mathrm{d}x_J$ 的外积定义为

$$\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q},$$

它是$(p+q)$-形式。显然如果 $\mathrm{d}x_I$ 和 $\mathrm{d}x_J$ 中有公共元素,那么 $\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J = 0$。对于一般 p-形式 $\omega = \sum_I g_I(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_I$ 和 q-形式 $\eta = \sum_J h_J(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_J$,定义 ω 和 η 的外积 $\omega \wedge \eta$ 为

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} g_I(\boldsymbol{x}) h_J(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J。$$

它是$(p+q)$-形式。在 Λ 中引入外积运算后,就明白为什么在微分形式的定义中采用外积符号 $\wedge$,它把定义与运算统一起来。在外积定义中,实际上假定了 $p \geqslant 1, q \geqslant 1$。对于 0-形式 f,我们补充定义

$$f\omega = f \wedge \omega = \sum_I f(\boldsymbol{x}) g_I(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_I, \quad \omega \in \Lambda^p。$$

外积有以下性质。

性质 1 设 $\omega \in \Lambda^p, \eta \in \Lambda^q$,则当 $p + q > n$ 时,

$$\omega \wedge \eta = 0。$$

这是因为当 $p + q > n$ 时,$\{i_1, i_2, \cdots, i_p\}$ 和 $\{j_1, j_2, \cdots, j_q\}$ 必有公共元素。

性质 2 设 $\omega \in \Lambda^p, \eta \in \Lambda^q$,则

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega。$$

证 由外积的线性性质知,只要对 $\omega = g(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ 和 $\eta =$

$h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$证明即可。若$\{i_1,i_2,\cdots,i_p\}$与$\{j_1,j_2,\cdots,j_q\}$有公共元素，则有 $\omega\wedge\eta=\eta\wedge\omega=0$，命题已经成立。否则由定义知

$$\omega\wedge\eta=g(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q},$$

$$\eta\wedge\omega=h(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}。$$

要使 $\omega\wedge\eta$ 中的微分变到 $\eta\wedge\omega$ 中的顺序，只要把每个 $\mathrm{d}x_{i_r}(r=1,2,\cdots,p)$与 q 个 $\mathrm{d}x_{j_s}(s=1,2,\cdots q)$交换次序，每次交换次序都要改变符号，而总共要进行 pq 个外积次序的交换。

证毕

推论 设 $\omega\in\Lambda^p,\omega\neq0$，则当 p 为奇数时，$\omega\wedge\omega=0$。

注意：当 p 为偶数时，不一定成立 $\omega\wedge\omega=0$。

例 13.5.4 在 $\mathbf{R}^4$ 上，如果 $\omega=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$，那么

$$\begin{aligned}\omega\wedge\omega&=(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4)\wedge(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4)\\&=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\\&=2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4。\end{aligned}$$

这时 $\omega\wedge\omega\neq0$。

性质 3 对于任意 $\omega,\eta,\sigma\in\Lambda$，成立

分配律：$(\omega+\eta)\wedge\sigma=\omega\wedge\sigma+\eta\wedge\sigma$，

$\sigma\wedge(\omega+\eta)=\sigma\wedge\omega+\sigma\wedge\eta$。

结合律：$(\omega\wedge\eta)\wedge\sigma=\omega\wedge(\eta\wedge\sigma)$。

证明留作习题。

例 13.5.5 在 $\mathbf{R}^n$ 上，如果 $\omega=\sum\limits_i f_i\mathrm{d}x_i,\eta=\sum\limits_j g_j\mathrm{d}x_j$，则

$$\omega\wedge\eta=\sum_{i,j}f_ig_j\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(f_ig_j-f_jg_i)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j。$$

如果 $\lambda=\sum\limits_{1\leqslant j<k\leqslant n}h_{jk}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k$，则

$$\omega\wedge\lambda=\sum_{i,j<k}f_ih_{jk}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}(f_ih_{jk}-f_jh_{ik}+f_kh_{ij})\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k。$$

例 13.5.6 设

$$T:x=x(u,v),\quad y=y(u,v)$$

为区域 $D(\subset\mathbf{R}^2)$上具有连续偏导数的映射。则

$$\mathrm{d}x=x_u\mathrm{d}u+x_v\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}y=y_u\mathrm{d}u+y_v\mathrm{d}v。$$

因此

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=(x_u\mathrm{d}u+x_v\mathrm{d}v)\wedge(y_u\mathrm{d}u+y_v\mathrm{d}v)$$

$$= x_u y_v \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v + x_v y_u \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u = (x_u y_v - x_v y_u)\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$$
$$= \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

现在回到一开始讲的问题,介绍微分形式的一个应用。先以极坐标变换

$$T:\ x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

为例。这时

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta = r\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta。$$

如果我们将 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$ 看作有向面积微元,上式就是极坐标变换下的有向面积微元之间的关系,而 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r > 0$ 说明这两个有向面积微元具有相同的符号。将 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$ 分别看成正面积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,就得到变量代换公式

$$\iint_{T(D)} f(x,y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iint_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta。$$

一般地,设 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标变换为

$$T: y_1 = y_1(x_1,\cdots,x_n), y_2 = y_2(x_1,\cdots,x_n), \cdots, y_n = y_n(x_1,\cdots,x_n)。$$

对上式取微分,得到

$$\mathrm{d}y_i = \sum_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k, (i = 1,2,\cdots,n)。$$

从此式得到(留作习题)

$$\mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n = \frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n。$$

这说明在坐标变换下,基本 n-形式之间相差的因子就是映射的 Jacobi 行列式。如果也将 $\mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n$ 和 $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ 分别看成坐标系 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 和坐标系 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中的有向体积元素($n=2$ 时为有向面积元素),那么同样成立用微分形式表示的重积分变量代换公式

$$\int_{T(D)} f(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n$$
$$= \int_D f(y_1(\boldsymbol{x}),y_2(\boldsymbol{x}),\cdots,y_n(\boldsymbol{x}))\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n。$$

以后将知道,这样做会带来很大的方便。这也是引入微分形式的目的之一。

习 题

1. 计算下列外积:

(1) $(x\mathrm{d}x+7z^2\mathrm{d}y)\wedge(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+6\mathrm{d}z)$;

(2) $(\cos y\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y)\wedge(\sin y\mathrm{d}x-\sin x\mathrm{d}y)$;

(3) $(6\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+27\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z)\wedge(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$。

2. 设

$$\omega=a_0+a_1\mathrm{d}x_1+a_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+a_3\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4,$$

$$\eta=b_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+b_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+b_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+b_4\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4。$$

求 $\omega+\eta$ 和 $\omega\wedge\eta$。

3. 求

$$\omega=x_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+x_3\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+(1+x_2^2)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+x_2^2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1$$
$$+(x_3^2+x_2^2)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3-x_1^2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_2$$

的标准形式。

4. 证明外积满足分配律和结合律。

5. 写出微分形式 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 在下列变换下的表达式:

(1) 柱面坐标变换

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z;$$

(2) 球面坐标变换

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi。$$

6. 设 $\omega_j=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^j\mathrm{d}x_i\ (j=1,2,\cdots,n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的 1-形式,证明

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n=\det(a_i^j)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n。$$

14. 设 D 为两条直线 $y=x$, $y=4x$ 和两条双曲线 $xy=1$, $xy=4$ 所围成的区域，$F(u)$是具有连续导数的一元函数，记 $f(u)=F'(u)$。证明

$$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y = \ln 2\int_1^4 f(u)\mathrm{d}u ,$$

其中∂D 的方向为逆时针方向。

15. 证明：若 Σ 为封闭曲面，$\boldsymbol{l}$ 为一固定向量，则

$$\iint_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}S = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 Σ 的单位外法向量。

16. 设区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 所围成。证明：

$$\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r} = \frac{1}{2}\iint_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 Σ 的单位外法向量，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

17. 设函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$和 $R(x,y,z)$在 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数。且对于任意光滑曲面 Σ，成立

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0。$$

证明：在 $\mathbf{R}^3$ 上，$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\equiv 0$。

18. 设 L 是平面 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ 上的简单闭曲线，它所包围的区域 D 的面积为 S，其中$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是平面取定方向上的单位向量。证明

$$S = \frac{1}{2}\int_L\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix},$$

其中 L 的定向与平面的定向符合右手定则。

§4 微分形式的外微分

外微分

设 $U\subset\mathbf{R}^n$ 为区域，U 上的可微函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全微分为

$$\mathrm{d}f = \sum_{n=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i 。$$

这可以理解为，一个 0 - 形式作了微分运算后成为了 1 - 形式。

现在将微分运算 d 推广到 Λ^k 上去。对 Λ^k 中的任意一个 k - 形式

$$\omega = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} g_{i_1,i_2,\cdots,i_k}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge \mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

定义

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} (\mathrm{d}g_{i_1,i_2,\cdots,i_k}(\boldsymbol{x}))\wedge \mathrm{d}x_{i_1}\wedge \mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_k}\\ &= \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_{i_1,i_2,\cdots,i_k}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\wedge \mathrm{d}x_{i_1}\wedge \mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_k}。\end{aligned}$$

同时,对空间 $\Lambda=\Lambda^0+\Lambda^1+\cdots+\Lambda^n$ 上的任意一个元素

$$\omega=\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_n,\ \omega_i\in\Lambda^i,$$

定义

$$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}\omega_0+\mathrm{d}\omega_1+\cdots+\mathrm{d}\omega_n。$$

这样一来,微分运算 $\mathrm{d}:\Lambda\to\Lambda$ 就是线性的,即 $\mathrm{d}(\alpha\omega+\beta\eta)=\alpha\mathrm{d}\omega+\beta\mathrm{d}\eta$,其中 ω, $\eta\in\Lambda$, α, β 为常数。这样的微分运算 d 称为**外微分**。

由定义直接得

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge \mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_k})=\mathrm{d}(1\mathrm{d}x_{i_1}\wedge \mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_k})\\ &=(\mathrm{d}1)\wedge \mathrm{d}x_{i_1}\wedge \mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_k}=0。\end{aligned}$$

例 14.4.1 设 $\omega=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上的 1 - 形式,则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &=(\mathrm{d}P)\wedge \mathrm{d}x+(\mathrm{d}Q)\wedge \mathrm{d}y\\ &=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}y\\ &=\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y。\end{aligned}$$

例 14.4.2 设 $\omega=P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 为 $\mathbf{R}^3$ 上的 1 - 形式,则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &=(\mathrm{d}P)\wedge \mathrm{d}x+(\mathrm{d}Q)\wedge \mathrm{d}y+(\mathrm{d}R)\wedge \mathrm{d}z\\ &=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}y+\\ &\quad\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}z\\ &=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y。\end{aligned}$$

例 14.4.3 设

$$\omega=P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$$

为 $\mathbf{R}^3$ 上的 2 - 形式,则

$$\mathrm{d}\omega=(\mathrm{d}P)\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+(\mathrm{d}Q)\wedge \mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+(\mathrm{d}R)\wedge \mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dz \wedge dx +$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx \wedge dy \wedge dz。$$

下面列出外微分的两个性质。

性质 1 设 ω 为 k − 形式，η 为 l − 形式，则

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta。$$

证 由于 d 的线性性质，只要证明

$$\omega = a(\boldsymbol{x})dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \eta = b(\boldsymbol{x})dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$$

的情形即可。这时

$$d(\omega \wedge \eta)$$

$$= d(a(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l})$$

$$= d(a(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(b\frac{\partial a}{\partial x_i}dx_i + a\frac{\partial b}{\partial x_i}dx_i\right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} b\frac{\partial a}{\partial x_i}dx_i\right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} +$$

$$(-1)^k (a\,dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b}{\partial x_i}dx_i\right) \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$$

$$= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta。$$

设 $\omega \in \Lambda$，定义 $d^2\omega = d(d\omega)$。在以下讨论中，我们假设微分形式的系数都具有二阶连续偏导数。

例 14.4.4 设 $f \in \Lambda^0$ 为 0 − 形式，证明 $d^2 f = 0$。

证 由于 f 具有二阶连续偏导数，因此$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$。所以

$$d^2 f = d(df) = d\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}dx_j \wedge dx_i = \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)dx_i \wedge dx_j = 0。$$

性质 2 对任意 $\omega \in \Lambda$，有 $d^2\omega = 0$。

证 由于 d 的线性性质，只要证明

$$\omega=a(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

的情形即可。这时

$$\mathrm{d}\omega=(\mathrm{d}a(\boldsymbol{x}))\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},$$

因此由性质 1 和例 14.4.4 的结果

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\omega&=\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)\\&=(\mathrm{d}^2a)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}-(\mathrm{d}a)\wedge\mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k})\\&=0\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}-(\mathrm{d}a)\wedge0=0。\end{aligned}$$

外微分的应用

首先看 Green 公式

$$\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中∂D 取 D 的诱导定向。在上一章第五节中,我们已经提到可以将 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 看成有向面积元素,那么如果将它看成是正面积元素 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的话,上式就可以表为

$$\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y。$$

因此由例 14.4.1 得到,对于 1－形式 $\omega=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 成立

$$\int_{\partial D}\omega=\int_D\mathrm{d}\omega。$$

再看 Stokes 公式

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Sigma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\=&\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中$\partial\Sigma$ 取Σ 的诱导定向。注意等式左边和右边分别是 1－形式和 2－形式的在定向曲线和曲面上的积分,因此由例 14.4.2 可知,对于 1－形式 $\omega=P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$,上式就是

$$\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_\Sigma\mathrm{d}\omega。$$

同样地,对于 Gauss 公式

$$\iint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

如果我们将有向体积元素 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 看成是正体积元素 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的话,它就

可以表为

$$\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,$$

其中$\partial\Omega$ 取Ω 的诱导定向。因此由例 14.4.3 可知,对于 2－形式

$$\omega=P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

上式就是

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega。$$

最后看看 Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b \mathrm{d}f(x)=f(x)\Big|_a^b,$$

如果将上式右端视为 0－形式 $f(x)$在区间 $D=[a,b]$的诱导定向边界$\partial D=\{a,b\}$上的积分,那么上式就可以表为

$$\int_{\partial D}f=\int_D \mathrm{d}f。$$

这样一来,Newton-Leibniz 公式、Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式就可以统一地写成如下形式:

$$\int_{\partial M}\omega=\int_M \mathrm{d}\omega。$$

这个式子统称为 **Stokes 公式**。它说明了,高次的微分形式 $\mathrm{d}\omega$ 在给定区域上的积分等于低一次的微分形式 ω 在低一维的区域边界上的积分。Stokes 公式是单变量情形的 Newton-Leibniz 公式在多变量情形的推广,是数学分析中最精彩的结论之一。读者在今后的课程中还会看到它的广泛应用。

习　题

1. 计算下列微分形式的外微分:

   (1) 1－形式 $\omega=2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$;

   (2) 1－形式 $\omega=\cos y\mathrm{d}x-\sin x\mathrm{d}y$;

   (3) 2－形式 $\omega=6z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-xy\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$。

2. 设 $\omega=a_1(x_1)\mathrm{d}x_1+a_2(x_2)\mathrm{d}x_2+\cdots+a_n(x_n)\mathrm{d}x_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 1－形式,求 $\mathrm{d}\omega$。

3. 设 $\omega=a_1(x_2,x_3)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+a_2(x_1,x_3)\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+a_3(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的 2－形式,求 $\mathrm{d}\omega$。

4. 设在 $\mathbf{R}^3$ 上在一个开区域 $\Omega=(a,b)\times(c,d)\times(e,f)$上定义了具有连续导

数的函数 $a_1(z),a_2(x),a_3(y)$，试求形如

$$\omega=b_1(y)\mathrm{d}x+b_2(z)\mathrm{d}y+b_3(x)\mathrm{d}z$$

的 1－形式 ω，使得

$$\mathrm{d}\omega=a_1(z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+a_2(x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+a_3(y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y。$$

5. 设 $\omega=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\,(a_{ij}=-a_{ji},i,j=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 2－形式，证明

$$\mathrm{d}\omega=\frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k。$$

§5 场论初步

在实际应用中，常常要考察某种物理量（如温度，密度，电场强度，力，速度等）在空间的分布和变化规律，从数学和物理上看就是场。

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是一个区域，若在时刻 t，Ω 中每一点 (x,y,z) 都有一个确定的数值 $f(x,y,z,t)$（或确定的向量值 $\boldsymbol{f}(x,y,z,t)$）与它对应，就称 $f(x,y,z,t)$（或 $\boldsymbol{f}(x,y,z,t)$）为 Ω 上的**数量场（或向量场）**。例如，某一区域上每一点的温度确定了一个数量场，它称为温度场；而某流体在某一区域上每一点的速度确定了一个向量场，它称为速度场，如此等等。如果一个场不随时间的变化而变化，就称该场为**稳定场**；否则称为**不稳定场**。在本节中除非特别声明，我们只考虑稳定场。

梯度

显然，Ω 上任何一个三元函数 $f(x,y,z)$ 都可以看成是 Ω 上的一个数量场。若 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上具有连续偏导数，我们知道其梯度为

$$\mathbf{grad}f=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k},$$

而且沿方向

$$\boldsymbol{l}=\cos(l,x)\boldsymbol{i}+\cos(l,y)\boldsymbol{j}+\cos(l,z)\boldsymbol{k}$$

的方向导数可以表为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\mathbf{grad}f\cdot\boldsymbol{l}。$$

我们称曲面

$$f(x,y,z)=c\,(\text{常数})$$

为 f 的等值面。我们知道，若 f_x,f_y,f_z 不同时为零，那么在等值面上的一个单