证明: 如果 $\{F_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是联族, 并且每个 $F_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ 是有界闭集, 那么 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \varnothing$.

§1.5 实数理论和极限论

本节内容是给读者参考的.

1. 实数理论 上面一节, 整个理论是建立在实数直线的连续性的基础上. 但是, 关于实数直线本身的连续性的理论, 并未说明. 下面我们以有理数为基础来建立实数的理论. 尽管人们早就在应用实数 —— 有理数或无理数, 然而什么是实数? 这个问题直到十九世纪后半叶才得到严格解决. 这方面的理论大体分为两类, 一类由 Cantor, Ch. Me′ray (梅赖) 和 Weierstrass (魏尔斯特拉斯), 分别获得的, 他们的形式虽略有差异, 但实质上是差不多的, 这就是下面所要介绍的, 这种方法具有普遍意义. 另一类是 Dedekind (戴德金) 的理论. 关于这个理论以及这两种理论的统一可参看 [1].

定义 1.5.1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 都是有理数. 假如对于任意的正有理数 ε, 有自然数 N, 使得当 $n, m \geqslant N$ 时不等式

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \tag{1.5.1}$$

成立, 就称 $\{a_n\}$ 是**基本有理数列**.

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个基本有理数列, 若对任一正有理数 ε, 有自然数 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时不等式

$$|a_n - b_n| < \varepsilon \tag{1.5.2}$$

成立, 就称基本有理数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 相等, 记作 $\{a_n\} = \{b_n\}$.

我们称基本有理数列是一个**实数**. 规定相等的基本有理数列是同一个实数.

引理 1 基本有理数列 $\{a_n\}$ 是有界的, 即有一个有理数 M, 使得对一切自然数 n, 成立着

$$|a_n| \leqslant M.$$

证 因为 $\{a_n\}$ 是基本有理数列, 所以对 $\varepsilon = 1$ 有自然数 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时 (1.5.1) 成立, 即

$$|a_n - a_N| < 1,$$

从而当 $n \geqslant N$ 时有

$$|a_n| < |a_N| + 1,$$

令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N| + 1\}$, 那么 M 是有理数, 而且对一切自然数 n 都有

$$|a_n| \leqslant M.$$

证毕

引理 2 (i) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个基本有理数列, 那么 $\{a_n+b_n\},\{a_nb_n\}$ 都是基本有理数列.

(ii) 如果 $\{a_n\},\{a'_n\},\{b_n\}$ 和 $\{b'_n\}$ 都是基本有理数列, 而且

$$\{a_n\}=\{a'_n\},\quad \{b_n\}=\{b'_n\},$$

必有 $\{a_n+b_n\}=\{a'_n+b'_n\},\{a_nb_n\}=\{a'_nb'_n\}$.

证 由引理 1, 有正有理数 A, 使得对一切自然数 n 成立着

$$|a_n|<A,\quad |a'_n|<A,\quad |b_n|<A,\quad |b'_n|<A.$$

设 ε 是一个正有理数, 有自然数 N 使得不等式

$$|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2A},\quad |b_n-b_m|<\frac{\varepsilon}{2A},$$
$$|a_n-a'_n|<\frac{\varepsilon}{2A},\quad |b_n-b'_n|<\frac{\varepsilon}{2A},$$

对一切 $n,m\geqslant N$ 成立. 那么当 $n,m\geqslant N$ 时,

$$\begin{aligned}|a_nb_n-a_mb_m|&=|a_n(b_n-b_m)+b_m(a_n-a_m)|,\\&\leqslant A|b_n-b_m|+A|a_n-a_m|<\varepsilon\end{aligned}$$

所以 $\{a_nb_n\}$ 是基本有理数列. 又当 $n\geqslant N$ 时,

$$\begin{aligned}|a_nb_n-a'_nb'_n|&=|a_n(b_n-b'_n)+b'_n(a_n-a'_n)|,\\&\leqslant A|b_n-b'_n|+A|a_n-a'_n|<\varepsilon\end{aligned}$$

所以 $\{a_nb_n\}=\{a'_nb'_n\}$.

其余的部分也可以类似地证明.

利用引理 2 可以规定实数的运算如下:

定义 1.5.2 设 $a=\{a_n\},b=\{b_n\}$ 是两个实数, 称实数 $\{a_n+b_n\}$ 为 "a **加** b **的和**", 记作 $a+b$; 称 $\{a_nb_n\}$ 为 "a **乘** b **的积**", 记作 $a\cdot b$ 或 ab.

引理 2 说明了 $a+b,a\cdot b$ 确是实数, 而且有确定的意义, 就是说, 如果 $a=a',b=b'$, 那么必然 $a+b=a'+b',a\cdot b=a'\cdot b'$.

容易证明下面的定理:

定理 1.5.1 实数全体 E^1 按照上述的加法及乘法成为一个域. 换句话说, E^1 具有下面各项性质:

1° E^1 按照加法成一交换群:

(i) 当 $a, b \in E^1$ 时, $a + b \in E^1$;

(ii) 加法结合律: 如果 $a, b, c \in E^1$, 那么

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

(iii) 存在零元素 $\{0, 0, \cdots, 0, \cdots\} \in E^1$, 记作 0, 对一切 $a \in E^1$,

$$a + 0 = a;$$

(iv) 对于每一个 $a \in E^1$, 有负元素 $-a \in E^1$, 使得

$$a + (-a) = (-a) + a = 0;$$

(v) 加法交换律: 若 $a, b \in E^1$, 那么 $a + b = b + a$;

2° E^1 中的非零元素全体按照乘法成一交换群:

(i) 当 $a, b \in E^1$ 时, $a \cdot b \in E^1$;

(ii) 乘法结合律: 如果 $a, b, c \in E^1$, 那么 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

(iii) 存在单位元素 $1(= \{1, 1, \cdots\}) \in E^1$, 使一切 $a \in E^1$

$$a \cdot 1 = a;$$

(iv) 如果 $a \in E^1$ 而且 $a \neq 0$, 那么必有 (乘法) 逆元素 $a^{-1} \in E^1$, 使得

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1;$$

(v) 乘法交换律: 对任意的 $a, b \in E^1$, 有 $a \cdot b = b \cdot a$;

3° 乘法与加法之间的分配律: 如果 $a, b, c \in E^1$, 那么

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

证 我们只证明 2° 的 (iv) 和 3°.

先对于实数 $a \neq 0$, 证明存在逆元素 $a^{-1} \in E^1$, 使得

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

设 $a = \{a_n\} \in E^1, a \neq 0$, 那么必存在正有理数 ε, 在区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中最多只有 $\{a_n\}$ 中的有限项. (不然的话, 对每个正有理数 ε, 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中有 $\{a_n\}$ 的无限项, $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$ 即 $|a_{n_k}| < \varepsilon$, 但是 $\{a_n\}$ 是基本数列, 有自然数 N 使得当 $n, m \geqslant N$ 时 (1.5.1) 成立, 取一个 $n_k \geqslant N$, 那么就知道当 $n \geqslant N$ 时

$$|a_n| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k}| < 2\varepsilon,$$

这样一来 $a=0$.) 设当 $n\geqslant N_\varepsilon$ 时, $|a_n|\geqslant\varepsilon$. 规定 $a^{-1}=\{a_n'\}$ 如下: $a_1',a_2',\cdots,a_{N_\varepsilon-1}'$ 任意取定, 而当 $n\geqslant N_\varepsilon$ 时, 令 $a_n'=\dfrac{1}{a_n}$. 现在证明 $\{a_n'\}$ 是基本有理数列. 事实上, 当 $n,m\geqslant N_\varepsilon$ 时,

$$|a_n'-a_m'|=\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_m}\right|=\frac{|a_n-a_m|}{|a_na_m|}.$$

由于对任意的正有理数 η, 存在自然数 N', 使得当 $n,m\geqslant N'$ 时, $|a_n-a_m|<\eta\varepsilon^2$. 又当 $n,m>N_\varepsilon$ 时, $|a_na_m|\geqslant\varepsilon^2$, 从而当 $n,m\geqslant\max(N',N_\varepsilon)$ 时成立

$$|a_n'-a_m'|=\frac{|a_n-a_m|}{|a_na_m|}<\frac{\eta\varepsilon^2}{\varepsilon^2}=\eta.$$

所以 $\{a_n'\}$ 是基本有理数列, 因此 $a^{-1}=\{a_n'\}\in E^1$, 由于

$$a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=\{a_1a_1',\cdots,a_Na_N',1,\cdots,1,\cdots\},$$

这个数列中从第 N 项以后全是 1, 它等于 $\{1,\cdots,1,\cdots\}=1$, 因此

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1.$$

现在来证明 3°. 设 $a=\{a_n\},b=\{b_n\},c=\{c_n\}$. 于是

$$b+c=\{b_n+c_n\},a\cdot b=\{a_n\cdot b_n\},\quad a\cdot c=\{a_n\cdot c_n\},$$

从而

$$\begin{aligned}a\cdot(b+c)&=\{a_n(b_n+c_n)\}=\{a_n\cdot b_n+a_n\cdot c_n\}\\&=\{a_n\cdot b_n\}+\{a_n\cdot c_n\}=a\cdot b+a\cdot c.\end{aligned}$$

其余各项请读者自己证明. 证毕

我们简记 $a+(-b)=a-b$, 称为 a **减** b 的**差**. 容易明白: $0-a=-a$.

当 $b\neq0$ 时, 简记 $a\cdot b^{-1}=\dfrac{a}{b}$ (或 a/b), 称为 a **除以** b 的**商**, 或称为 a 与 b 的比值, 也可记作 $a:b$.

容易看出, 如果 $a=\{a_n\},b=\{b_n\}$, 那么 $a-b=\{a_n-b_n\}$; 当 $b\neq0$, 并且一切 b_n 全不为 0 时, $a/b=\{a_n/b_n\}$.

上面规定好了实数的运算, 下面来规定实数的顺序.

定义 1.5.3 设 $a=\{a_n\},b=\{b_n\}$ 是两个实数, 假如有正有理数 δ 和自然数 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时,

$$a_n-b_n>\delta,$$

那么称 b 小于 a, 记作 $b<a$; 或称 a 大于 b, 记为 $a>b$.

容易证明, 若基本有理数列 $\{a_n\}=\{a'_n\},\{b_n\}=\{b'_n\}$, 那么当 $\{a_n\}<\{b_n\}$ 时, $\{a'_n\}<\{b'_n\}$, 所以 $a<b$ 有确定的意义.

定理 1.5.2 设 a,b 是两个实数, 那么三个关系

$$a=b,\quad a<b,\quad a>b$$

必有一个成立, 而且只有一个成立.

证 因为 $a=\{a_n\},b=\{b_n\}$ 都是基本有理数列, 所以对于任一正有理数 ε, 有正整数 $N=N_\varepsilon$, 使得当 $m\geqslant N$ 时有

$$|a_m-a_N|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |b_m-b_N|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此
$$|a_m-b_m-(a_N-b_N)|<\varepsilon,$$
也就是

$$a_N-b_N-\varepsilon<a_m-b_m<a_N-b_N+\varepsilon. \tag{1.5.3}$$

假如有一个 ε 使得上式两端 $a_N-b_N-\varepsilon$ 及 $a_N-b_N+\varepsilon$ 同号, 譬如说是正号, 那么只要令 $a_N-b_N-\varepsilon=\delta$, 当 $m\geqslant N$ 时

$$a_m-b_m>\delta.$$

这就是说, $a>b$. 类似地如果 (1.5.3) 两端同时为负号, 可证 $b>a$. 如果对一切正有理数 ε, (1.5.3) 两端异号, 就是

$$a_N-b_N-\varepsilon<0,\quad a_N-b_N+\varepsilon>0,$$

即
$$|a_N-b_N|<\varepsilon.$$
因此, 由 (1.5.3), 对每个正有理数 ε, 有自然数 N, 使当 $m\geqslant N$ 时,

$$|a_m-b_m|<\varepsilon+|a_N-b_N|<2\varepsilon.$$

这就证明了 $a=b$.

所以 $a=b,a<b$ 或 $a>b$ 三个不等式至少有一个成立. 至于上述关系不可能有两个同时成立, 容易从定义直接验证. 证毕

此外还可以证明, 实数的顺序与代数运算之间有下面的基本关系:

定理 1.5.3 设 a,b,c 是三个实数, 如果 $a<b$, 那么 $a+c<b+c$, 如果又有 $0<c$, 那么 $a\cdot c<b\cdot c$.

特别地, $a>0$ 与 $-a<0$ 是等价的.

定义 1.5.4 大于 0 的实数称为**正数**, 小于 0 的实数称为**负数**.

设 a 是一实数, 记 $|a|$ 为如下的实数: 当 $a \geqslant 0$ 时, $|a|=a$; 当 $a<0$ 时, $|a|=-a$. 称 $|a|$ 为实数 a 的**绝对值**.

容易证明: 如果 $\{a_n\}$ 是基本有理数列, $a=\{a_n\}$, 那么 $|a|=\{|a_n|\}$. 因此, a 的绝对值 $|a|$ 有确定的意义.

由定理 1.5.3 易知

定理 1.5.4 设 a 和 b 是实数, 那么 $|ab|=|a|\cdot|b|$, 并且

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

我们还要把有理数和一部分实数等同起来. 对任何有理数 r, 显然

$$\widetilde{r}=\{r,r,\cdots,r,\cdots\}$$

是一个基本有理数列, 即是一个实数, 称 $\widetilde{r}$ 是相应于有理数 r 的实数. 记 R_0 为有理数全体, $\widetilde{R}_0$ 是相应于有理数的实数全体. 容易看出映照

$$r \mapsto \widetilde{r}$$

是 R_0 与 $\widetilde{R}_0$ 间的一一对应, 而且在这个映照下, 代数运算和 "大小" 顺序关系保持不变, 就是说:

$$(\widetilde{r_1+r_2})=\widetilde{r}_1+\widetilde{r}_2, \quad \widetilde{r_1\cdot r_2}=\widetilde{r}_1\cdot\widetilde{r}_2,$$
$$r_1<r_2 \quad \text{蕴涵}\ \widetilde{r}_1<\widetilde{r}_2.$$

我们今后就把 r 和 $\widetilde{r}$ 等同起来. 这是可以的, 因为对于实数来说, 只要代数运算和大小顺序没有改变就行了. 这样一来, 有理数就是实数的一部分了.

我们来证明有理数在实数中是处处稠密的, 就是要证明任何两个实数中间必有有理数.

定理 1.5.5 设 a,b 是两个实数, $a<b$, 那么必有有理数 $\widetilde{c}$ 适合

$$a<\widetilde{c}<b.$$

证 设 $a=\{a_n\}, b=\{b_n\}$, 由于 $\{a_n\}<\{b_n\}$, 必有正有理数 δ 和自然数 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时有

$$b_n-a_n>\delta,$$

又因为 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 是基本数列, 必有 $N_1 \geqslant N$, 使得当 $m,n \geqslant N_1$ 时,

$$|a_n-a_m|<\frac{\delta}{4}, \quad |b_n-b_m|<\frac{\delta}{4},$$

取 $b_{N_1}-\dfrac{\delta}{2}=c$, 这是有理数, 并且当 $m\geqslant N_1$ 时有

$$b_m-c=b_m-b_{N_1}+\frac{\delta}{2}>-\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{4}>0,$$

所以 $\{b_m\}>\{c\}$; 又当 $m\geqslant N_1$ 时,

$$c-a_m=b_{N_1}-a_{N_1}+(a_{N_1}-a_m)-\frac{\delta}{2}>\delta-\frac{\delta}{4}-\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{4}>0,$$

即 $\{c\}>\{a_m\}$. 证毕

在转入讨论实数的极限论之前, 先说明一个问题: 现在建立实数的方法是把有理数作为已知, 而把一列有理数 (当然不是一般的, 而是构成基本序列的有理数序列) 就称为一个实数. 这种把一列数规定作为一个数是否太奇怪呢? 其实, 这并不奇怪. 例如, 在人们知道了自然数后, 发现它对减法运算不封闭, 如果要对减法运算封闭, 就需要出现 $0-n$ 这种形式的数, 即负数, 记为 $-n$. 再如人们发现自然数对除法运算不封闭, 因而需要出现用自然数对 (m,n) 规定为一个数, 即有理数, 记为 $\dfrac{m}{n}$. 而实数理论正是由于极限运算的出现 (尽管早在毕达哥拉斯时代已出现个别的非有理数的数, 但那时, 作为求极限的运算远未出现), 例如一个单调增加的数列, 如果有上界, 是否一定有极限. 这个问题, 从几何的直观, 似乎是显而易见地肯定对的. 但如果要求给出严格的逻辑证明却又发生困难. 这样就必须要有严格的实数理论, 给极限论以坚实的基础. Cantor 提出的这种用一列数来规定一个数的思想不仅为实数建立了严格的理论, 而且这个思想方法已被泛函分析和其他学科推广了. 例如本书第四章中还将采用这种方法讨论度量空间的完备化问题.

2. 关于实数列的极限理论 现在利用上面建立的实数理论, 来证明极限理论中的几个基本定理.

定义 1.5.5 设 $\{a_n\}$ 是一实数列. 如果有实数 a 适合如下的条件: 对于任何正实数 ε, 有自然数 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时成立

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

那么称实数列 $\{a_n\}$ **收敛**于极限 a, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

定理 1.5.6 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 对于任一正 (实) 数 ε, 有自然数 N, 使得当 $n,m\geqslant N$ 时

$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

这就是著名的 Cauchy (柯西) 收敛原理.

证　必要性是显然的, 我们只要证明条件的充分性. 为便于理解, 在下面的证明过程中, 暂时仍然把有理数和对应于有理数 r 的实数 $\widetilde{r}=\{r\}$ 区别开来.

充分性的证明: 对于实数 a_n, 存在有理数 x_n, 使相应的实数 $\widetilde{x}_n$ 适合

$$a_n<\widetilde{x}_n<a_n+\widetilde{\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

对于任一正有理数 δ, 由假设, 必有自然数 $N\left(\text{不妨取 } N>\dfrac{4}{\delta}\right)$, 使得当 $n,m\geqslant N$ 时,

$$|a_n-a_m|<\widetilde{\left(\frac{\delta}{4}\right)},$$

于是当 $n,m\geqslant N$ 时,

$$\begin{aligned}|\widetilde{x}_n-\widetilde{x}_m|&\leqslant|\widetilde{x}_n-a_n|+|a_m-\widetilde{x}_m|+|a_n-a_m|\\&\leqslant\widetilde{\left(\frac{1}{n}\right)}+\widetilde{\left(\frac{1}{m}\right)}+\widetilde{\left(\frac{\delta}{4}\right)}<\widetilde{\left(\frac{3\delta}{4}\right)},\end{aligned}$$

但是 $|\widetilde{x}_n-\widetilde{x}_m|=\widetilde{|x_n-x_m|}$, 所以, 当 $n,m\geqslant N$ 时,

$$|x_n-x_m|<\frac{3\delta}{4}, \tag{1.5.4}$$

即 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 是基本有理数列, 它就是一个实数, 记作 a. 现在来证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

因为

$$|a-\overline{x}_n|=\{|x_1-x_n|,|x_2-x_n|,\cdots,|x_k-x_n|,\cdots\},$$

由 (1.5.4) 容易看出, 当 $k,n\geqslant N$ 时,

$$\delta-|x_k-x_n|>\frac{\delta}{4}>0.$$

所以当 $n\geqslant N$ 时

$$|a-\widetilde{x}_n|<\widetilde{\delta},$$

对于任何正实数 ε, 取有理数 δ 适合 $0<2\widetilde{\delta}<\varepsilon$, 那么当 $n\geqslant N\left(\text{仍然 } N>\dfrac{4}{\delta}\right)$ 时,

$$|a-a_n|\leqslant|a-\widetilde{x}_n|+|\widetilde{x}_n-a_n|<\widetilde{\delta}+\widetilde{\left(\frac{1}{n}\right)}<2\delta<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.　　　　证毕