中国科学 : 数学　2018 年　第 48 卷　第 6 期 : 869 ∼ 878

SCIENTIA SINICA　Mathematica

《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论　文

与二维仿射 Toda 方程相关的 Lax 对的 Darboux 变换

献给胡和生教授 90 华诞

周子翔

复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: zxzhou@fudan.edu.cn

收稿日期: 2017-08-28;　接受日期: 2017-10-31;　网络出版日期: 2017-12-12

上海市自然科学基金 (批准号: 16ZR1402600) 资助项目

摘要　除最简单的 $A_n^{(1)}$ 外, 所有无限系列的仿射 Kac-Moody 代数所相应的二维 Toda 方程的 Lax 对都同时具有酉对称、循环对称和实对称. 本文对循环对称为奇数阶的情形和循环对称的阶数与矩阵阶数均为偶数的情形给出了保持所有上述对称的 Darboux 变换.

关键词　二维仿射 Toda 方程　Darboux 变换　显式解

MSC (2010) 主题分类　37K10, 35Q58, 35Q51

1　引言

对任何有限维单 Lie 代数或任何仿射 Kac-Moody 代数, 都存在相应的二维 Toda 方程 [1], 所有这些方程都是可积系统. 对二维 Toda 方程已有很多研究, 所用方法包括反散射、Hirota 方法和 Darboux 变换等 [2–9]. 在 Toda 场论 [10,11] 以及 Riemannian 几何和仿射几何 [12–18] 中, 二维 Toda 方程也有很多应用.

对任一个仿射 Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}$, 相应的二维 Toda 方程是 (参见文献 [15])

$$w_{j,xy} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ji}w_i\right) - v_j \exp\left(\sum_{i=1}^{n} c_{0i}w_i\right), \quad j = 1, \dots, n, \tag{1.1}$$

其中 $C = (c_{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的广义 Cartan 矩阵, 正整数 v_j $(j = 0, 1, \dots, n)$ 满足 $C(v_0, v_1, \dots, v_n)^{\mathrm{T}} = 0$. 当 $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$ 时, (1.1) 就是熟知的二维周期 Toda 方程

$$u_{j,xy} = \mathrm{e}^{u_j-u_{j-1}} - \mathrm{e}^{u_{j+1}-u_j}. \tag{1.2}$$

英文引用格式: Zhou Z X. Darboux transformations for the Lax pairs related to two dimensional affine Toda equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 869–878, doi: 10.1360/N012017-00191

　

文献 [19] 指出, (1.1) 中的任一个方程都是可积的, 并且给出了它们的 Lax 对. 对 $\mathfrak{g}=A_n^{(1)}$, Lax 对具有一个酉对称和一个 n 阶循环对称, 它有一个保持这些对称性的一阶 Darboux 变换 [6,7,13,14]. 其他无限系列的 Kac-Moody 代数相应的二维仿射 Toda 方程具有更复杂的对称性, 至少包括一个实对称、一个循环对称和一个酉对称, 对此也已有不少研究 [3,4,20,21]. 对 $A_n^{(1)}$、$A_{2n}^{(2)}$ 和 $A_{2n-1}^{(2)}$ 所相应的复二维仿射 Toda 方程, 文献 [22,23] 给出了 Darboux 变换. 对 $A_{2n}^{(2)}$、$C_n^{(1)}$ 和 $D_{l+1}^{(2)}$ 所相应的 (实) 二维仿射 Toda 方程, 文献 [21] 给出了它的 (积分形式的) 二元 Darboux 变换, 文献 [24–26] 给出了它的 (微分形式的) Darboux 变换.

对于 $A_{2n}^{(2)}$、$C_n^{(1)}$ 和 $D_{l+1}^{(2)}$, 相应的二维仿射 Toda 方程的 Lax 对的矩阵阶数等于循环对称的阶数, 但是其他一些 Kac-Moody 代数所相应的问题中, 矩阵阶数要大于循环对称的阶数. 本文将推广文献 [24,26] 到更一般的情形, 包括所有循环对称为奇数阶的情形和循环对称的阶数与矩阵阶数均为偶数的情形, 给出相应的 Darboux 变换的构造.

第 2 节讨论 Lax 对及其解的对称性; 第 3 节给出在不考虑对称性时的 Darboux 矩阵; 第 4 节给出本文的主要结果, 即构造了保持所有对称性的 Darboux 矩阵.

2 Lax 对及其对称性

给定正整数 N 和 $r_1,\dots,r_N$, 记 $M=r_1+\cdots+r_N$. 本文均将 $M\times M$ 矩阵按 $(r_1,\dots,r_N)$ 分块为 $N\times N$ 分块矩阵.

为方便起见, 分块矩阵的下标 j 可取任何整数, 使得满足 $k\equiv j \mod N$ $(1\leqslant k\leqslant N)$ 的正整数 k 即为通常的下标. 例如, 对矩阵 A, A_{01} 即代表 A_{N1}, 又如 δ_{jk} 在 $j\equiv k \mod N$ 时取值 1 而在其他情况取值 0.

现在考虑 Lax 对

$$\Phi_x=(\lambda J+P)\Phi,\quad \Phi_y=\frac{1}{\lambda}Q\Phi, \tag{2.1}$$

其中

$$P=V_xV^{-1},\quad Q=VJ^{\mathrm{T}}V^{-1}, \tag{2.2}$$

$J=(J_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant N}$ 和 $V=(V_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant N}$ 是 $N\times N$ 分块矩阵, 并且 J 是常值矩阵, $V(x,y)$ 是分块对角矩阵, 而 J_{jk} 和 V_{jk} 是 $r_j\times r_k$ 矩阵.

Lax 对 (2.1) 的可积条件为

$$P_t+[J,Q]=0, \tag{2.3}$$

或可等价地写为

$$(V_xV^{-1})_y+[J,VJ^{\mathrm{T}}V^{-1}]=0. \tag{2.4}$$

当 J 和 V 满足特定的对称性时, (2.4) 包含了各种二维仿射 Toda 方程.

记 $\omega=\exp(\frac{2\pi\mathrm{i}}{N})$, $\Omega=\mathrm{diag}\,(I_{r_1},\omega^{-1}I_{r_2},\dots,\omega^{-N+1}I_{r_N})$, 其中“diag”表示分块对角矩阵. 显然 $\Omega^N=I$. 再记 $\theta=\exp(\frac{\pi\mathrm{i}}{N})$, $\Theta=\mathrm{diag}\,(I_{r_1},\theta^{-1}I_{r_2},\dots,\theta^{-N+1}I_{r_N})$, 则 $\theta^2=\omega$, $\Theta^2=\Omega$.

现在假设成立如下的对称性: 存在 $N\times N$ 实对称矩阵 K, 满足

$$K^2=I,\quad \Omega K\Omega=\omega^{2-m}K, \tag{2.5}$$

以及

$$\bar{J}=J,\quad \Omega J\Omega^{-1}=\omega J,\quad KJK=J^{\mathrm{T}}, \tag{2.6}$$

$$\bar{V}=V,\quad \Omega V\Omega^{-1}=\pm V,\quad V^{\mathrm{T}}KV=K, \tag{2.7}$$

其中 m 是一个整数, 这里 $\pm$ 号表示或取正号, 或取负号. 不过这个正负号的选取不影响 P 和 Q 所满足的对称性, 从而不影响 Lax 对. 除最简单的 $A_n^{(1)}$ 外, 所有无限系列的仿射 Kac-Moody 代数所相应的二维 Toda 方程的 Lax 对的系数矩阵均满足上述对称性 (2.5)–(2.7).

从文献 [25] 可知, 当 N 是奇数时, 对不同的 m, 所有的系统都是等价的; 而当 N 是偶数时, 对相同奇偶性的 m, 所有的系统都是等价的, 所以, 当 N 是奇数时, 我们总取 $m=2$; 而当 N 是偶数时总取 $m=0,1$.

直接计算可得下面的引理:

引理 2.1 如果 $V(x,y)$ 满足

$$\bar{V}=V,\quad \Omega V\Omega^{-1}=\pm V,\quad V^{\mathrm{T}}KV=K, \tag{2.8}$$

那么 $P=V_xV^{-1}$ 和 $Q=VJ^{\mathrm{T}}V^{-1}$ 满足

$$\begin{aligned}&\bar{P}=P,\quad \Omega P\Omega^{-1}=P,\quad KPK=-P^{\mathrm{T}},\\&\bar{Q}=Q,\quad \Omega Q\Omega^{-1}=\omega^{-1}Q,\quad KQK=Q^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

引理 2.2 $K'=\theta^{m-2}\Theta K\Theta$、$J'=\theta^{-1}\Theta^{-1}J\Theta$ 和 $Q'=\theta\Theta^{-1}Q\Theta$ 都是实矩阵, 且 K' 对称.

证明 由 (2.5) 得 $\omega^{-(j-1)}K_{jk}\omega^{-(k-1)}=\omega^{2-m}K_{jk}$. 因此 $K_{jk}\neq 0$ 时必有 $j+k\equiv m \mod N$. 由于 $\theta^N=-1$, 当 $K_{jk}\neq 0$ 时,

$$\theta^{-(j-1)}K_{jk}\theta^{-(k-1)}=\pm\theta^{2-(j+k)}K_{jk}=\pm\theta^{2-m}K_{jk}, \tag{2.10}$$

所以 $K'_{jk}=\pm K_{jk}$ (对不同的 j 和 k, 正负号可取得不同), K' 是实矩阵. 又由 K' 的表达式即知 K' 是对称矩阵.

类似地, 由 (2.6) 中的 $\Omega J\Omega^{-1}=\omega J$ 得 $\omega^{-(j-1)}J_{jk}\omega^{k-1}=\omega J_{jk}$. $J_{jk}\neq 0$ 时必有 $k\equiv j+1 \mod N$. 于是, 当 $J_{jk}\neq 0$ 时,

$$\theta^{-(j-1)}J_{jk}\theta^{k-1}=\pm\theta J_{jk}, \tag{2.11}$$

所以 $J'=\theta^{-1}\Theta^{-1}J\Theta$ 是实矩阵. 由 (2.9) 中的 $\Omega Q\Theta^{-1}=\theta^{-1}Q$ 同理可得 $Q'=\theta\Theta^{-1}Q\Theta$ 是实矩阵. 引理证毕. □

由 Lax 对的对称性, 下一引理给出了它的解所满足的对称性.

引理 2.3 设 V 满足 (2.8), Φ 是 Lax 对 (2.1) 当 $\lambda=\lambda_0$ 时的一个解, 则下列结论成立:

(i) $\Omega\Phi$ 是 (2.1) 当 $\lambda=\omega\lambda_0$ 时的解;

(ii) $\bar{\Phi}$ 是 (2.1) 当 $\lambda=\bar{\lambda}_0$ 时的解;

(iii) $\Psi=K\Phi$ 是当 $\lambda=-\lambda_0$ 时的共轭 Lax 对

$$\Psi_x=-(-\lambda_0J^{\mathrm{T}}+P^{\mathrm{T}})\Psi,\quad \Psi_y=-\frac{1}{-\lambda_0}Q^{\mathrm{T}}\Psi \tag{2.12}$$

的解;

(iv) 当 N 是偶数时, $\Omega^{N/2}\bar{\Phi}$ 是 (2.1) 当 $\lambda=-\bar{\lambda}_0$ 时的解;

(v) 当 N 是偶数时, $\Phi^{\mathrm{T}}K\Omega^{N/2}\Phi$ 与 x 和 y 无关;

(vi) $\Phi'=\Theta^{-1}\Phi$ 是

$$\Phi'_x=(\lambda J'+P)\Phi', \quad \Phi'_y=\frac{1}{\lambda}Q'\Phi' \tag{2.13}$$

当 $\lambda=\theta^{-1}\lambda_0$ 时的解, 其中 J' 和 Q' 由引理 2.2 给出, 于是当 λ_0 是实数时, 可要求 Φ' 为实解.

证明 (i) 由

$$\begin{aligned}(\Omega\Phi)_x&=\Omega(\lambda_0J+P)\Phi=(\omega\lambda_0J+P)\Omega\Phi,\\(\Omega\Phi)_y&=\frac{1}{\lambda_0}\Omega Q\Phi=\frac{1}{\omega\lambda_0}Q\Omega\Phi\end{aligned} \tag{2.14}$$

得到结论.

(ii) 是显然的.

(iii) 由

$$\begin{aligned}K\Phi_x&=K(\lambda_0J+P)\Phi=-(-\lambda_0J^{\mathrm{T}}+P^{\mathrm{T}})K\Phi,\\K\Phi_y&=\frac{1}{\lambda_0}KQ\Phi=-\frac{1}{-\lambda_0}Q^{\mathrm{T}}K\Phi\end{aligned} \tag{2.15}$$

得到结论.

(iv) 由 (i) 知, $\Omega^{N/2}\Phi$ 是 (2.1) 当 $\lambda=\omega^{N/2}\lambda_0=-\lambda_0$ 时的解, 再由 (ii) 即得结论.

(v) 由 (ii)–(iv) 知, $\Psi=K\Omega^{N/2}\Phi$ 是 $\lambda=\lambda_0$ 时的共轭 Lax 对

$$\Psi_x=-(\lambda_0J^{\mathrm{T}}+P^{\mathrm{T}})\Psi, \quad \Psi_y=-\frac{1}{\lambda_0}Q^{\mathrm{T}}\Psi \tag{2.16}$$

的解, 进而可直接验证

$$(\Phi^{\mathrm{T}}K\Omega^{N/2}\Phi)_x=0, \quad (\Phi^{\mathrm{T}}K\Omega^{N/2}\Phi)_y=0. \tag{2.17}$$

(vi) 由于 $P=V_xV^{-1}$ 是分块对角矩阵, 因此, $\Theta P\Theta^{-1}=P$. 由 J' 和 Q' 的定义即知 (2.13) 成立. 引理证毕. □

3 不考虑对称性时的 Darboux 变换

设有 $M\times M$ 矩阵

$$G(x,y,\lambda)=\sum_{j=0}^{L}G_j(x,y)\lambda^{L-j}, \quad G_0=I, \tag{3.1}$$

其中 $G_1,\dots,G_L$ 都是与 λ 无关的 $M\times M$ 矩阵. 如果存在满足与 (2.8) 类似的对称性

$$\bar{\widetilde{V}}=\widetilde{V}, \quad \Omega\widetilde{V}\Omega^{-1}=\pm\widetilde{V}, \quad \widetilde{V}^{\mathrm{T}}K\widetilde{V}=K \tag{3.2}$$

的分块对角矩阵 $\widetilde{V}(x,y)$, 使得对 (2.1) 的任意解 Φ, $\widetilde{\Phi}=G\Phi$ 满足

$$\widetilde{\Phi}_x=(\lambda J+\widetilde{P})\widetilde{\Phi}, \quad \widetilde{\Phi}_y=\frac{1}{\lambda}\widetilde{Q}\widetilde{\Phi}, \tag{3.3}$$

其中

$$\widetilde{P}=\widetilde{V}_x\widetilde{V}^{-1}, \quad \widetilde{Q}=\widetilde{V}J^{\mathrm{T}}\widetilde{V}^{-1}, \tag{3.4}$$

那么就称 $G(x,y,\lambda)$ 是 (2.1) 的一个保持对称性 (2.8) 的 L 阶 Darboux 矩阵.

一旦完成了 Darboux 矩阵的构造, 我们就能从二维仿射 Toda 方程的一个已知解得到它的新解.

对具体问题, 如二维仿射 Toda 方程, 构造的 Darboux 变换必须保持所有对称性, 以使得它将方程的一个解变为同一方程的解. 不过, 我们暂时先不考虑对称性 (3.2), 这时 L 阶 Darboux 变换可以通过推广文献 [27] 的方法 (也可参见文献 [12,28]) 来得到.

取定一个正整数 s ($1 \leqslant s \leqslant M-1$). 取 L 个互不相同的复数 $\lambda_1,\dots,\lambda_L$, 使得 $\bar{\lambda}_j+\lambda_k \neq 0$ ($j,k=1,\dots,L$). 取 H_j 为 Lax 对当 $\lambda=\lambda_j$ 时的 $M\times s$ 矩阵解. 记 (这里略去了 G 中的自变量 x 和 y)

$$\Gamma_{jk}=\frac{H_j^*KH_k}{\bar{\lambda}_j+\lambda_k}\quad (j,k=1,\dots,L),\quad \Gamma=(\Gamma_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant L},\quad \check{\Gamma}=\Gamma^{-1}, \tag{3.5}$$

$$G(\lambda)=\prod_{l=1}^{L}(\lambda+\bar{\lambda}_l)\left(I-\sum_{j,k=1}^{L}\frac{H_j\check{\Gamma}_{jk}H_k^*K}{\lambda+\bar{\lambda}_k}\right), \tag{3.6}$$

则可直接验证

$$G(\lambda)^{-1}=\prod_{l=1}^{L}(\lambda+\bar{\lambda}_l)^{-1}\left(I+\sum_{j,k=1}^{L}\frac{H_j\check{\Gamma}_{jk}H_k^*K}{\lambda-\lambda_j}\right). \tag{3.7}$$

由于 $G(\lambda)$ 是 λ 的 L 次多项式, 可以将其写为

$$G(\lambda)=\lambda^LI+\lambda^{L-1}G_1+\cdots+\lambda G_{L-1}+G_L. \tag{3.8}$$

由 (3.6) 可知,

$$\begin{aligned}G_1&=\sum_{l=1}^{L}\bar{\lambda}_l-\sum_{j,k=1}^{L}H_j\check{\Gamma}_{jk}H_k^*K,\\ G_L&=\left(\prod_{l=1}^{L}\bar{\lambda}_l\right)\left(I-\sum_{j,k=1}^{L}\frac{H_j\check{\Gamma}_{jk}H_k^*K}{\bar{\lambda}_k}\right).\end{aligned} \tag{3.9}$$

引理 3.1 设 $G(\lambda)$ 由 (3.6) 给出, 则 (3.3) 成立, 其中

$$\widetilde{P}=P-[J,G_1],\quad \widetilde{Q}=G_LQG_L^{-1}. \tag{3.10}$$

进一步, 如果 $\widetilde{V}$ 满足

$$\widetilde{V}=G_LV, \tag{3.11}$$

那么 $\widetilde{P}=\widetilde{V}_x\widetilde{V}^{-1}$ 和 $\widetilde{Q}=\widetilde{V}J^{\mathrm{T}}\widetilde{V}^{-1}$ 满足 (3.10).

证明 (3.5) 可给出

$$\Gamma_{jk,x}=H_j^*KJH_k,\quad \Gamma_{jk,y}=\frac{1}{\bar{\lambda}_j\lambda_k}H_j^*KQH_k. \tag{3.12}$$

由定义 (3.10) 可得

$$\begin{aligned}&(\lambda J+\widetilde{P})G-G(\lambda J+P)-G_x=0,\\ &\lambda^{-1}\widetilde{Q}G-\lambda^{-1}GQ-G_y=0\end{aligned} \tag{3.13}$$

对一切 λ 成立, 于是 (3.3) 成立.

$\widetilde{V}J^{\mathrm{T}}\widetilde{V}^{-1} = G_L Q G_L^{-1}$ 显然成立, 于是只需证明 $\widetilde{V}_x\widetilde{V}^{-1} = P - [J, G_1]$. 在 (3.13) 的第一个方程

$$G_x + G(\lambda J + P) = (\lambda J + P - [J, G_1])G \tag{3.14}$$

中取 $\lambda = 0$, 有

$$G_{L,x} + G_L P = (P - [J, G_1])G_L. \tag{3.15}$$

另一方面, 对 (3.11) 求导得

$$G_{L,x} + G_L P = \widetilde{V}_x\widetilde{V}^{-1}G_L. \tag{3.16}$$

所以成立 $\widetilde{V}_x\widetilde{V}^{-1} = P - [J, G_1]$. 引理证毕. □

由此引理可知, 在不考虑对称性 (3.2) 时, (3.6) 给出的是一个 Darboux 矩阵.

4 考虑对称性时的 Darboux 变换

对具体的可积系统, 我们必须考虑对称性, 这里要求变换后的 $\widetilde{V}$ 满足 (3.2). 对于不同的 N 和 M, 构造 Darboux 矩阵的方法是不同的.

情形 1 $N = 2p + 1$.

取非零实数 μ 及 Lax 对 (2.1) 当 $\lambda = \mu$ 时的实列向量解 H. 令 $L = 2p + 1$, $\lambda_j = \omega^{j-1}\mu$, $H_j = \Omega^{j-1}H$ $(j = 1, \dots, 2p + 1)$. 按 (3.6) 构造 $G(\lambda)$.

情形 2 $N = 4p + 2$ 且 M 是偶数.

取非零实数 μ 及 Lax 对 (2.1) 当 $\lambda = \mu$ 时的 $M \times M/2$ 实矩阵解 H, 使之满足 $H^{\mathrm{T}}K\Omega^{2p+1}H = 0$ (这由引理 2.3(v) 保证). 令 $L = 2p + 1$, $\lambda_j = \omega^{2j-2}\mu$, $H_j = \Omega^{2j-2}H$ $(j = 1, \dots, 2p + 1)$. 按照 (3.6) 构造 $G(\lambda)$.

情形 3 $N = 4p$ 且 M 是偶数.

取非零实数 μ 及辅助 Lax 对 (2.13) 当 $\lambda = \mu$ 时的 $M \times M/2$ 实矩阵解 H, 使之满足 $H^{\mathrm{T}}\Theta K\Theta\Omega^{2p}H = 0$ (这由引理 2.3(v) 和 2.3(vi) 保证). 这时, ΘH 是 Lax 对 (2.1) 当 $\lambda = \theta\mu$ 时的解. 令 $L = 2p$, $\lambda_j = \theta\omega^{2j-2}\mu$, $H_j = \Theta\Omega^{2j-2}H$ $(j = 1, \dots, 2p)$. 按照 (3.6) 构造 $G(\lambda)$.

注意, 上述取法的理由可参见文献 [25]. 对 N 是偶数且 M 是奇数的情形, 我们尚无法构造 Darboux 变换.

对情形 2 和 3, N 和 M 均为偶数, 且 $L = N/2$. 定理 4.1 的证明中需要用到下述两个引理.

引理 4.1 对情形 2 和 3, 成立

$$G(\lambda_a)H_a = 0, \quad G(-\bar{\lambda}_a)\Omega^{N/2}\bar{H}_a = 0, \quad a = 1, \dots, \frac{N}{2}. \tag{4.1}$$

证明 由 Γ_{jk} 的定义得

$$\begin{aligned} G(\lambda_a)H_a &= \prod_{l=1}^{N/2}(\lambda_a + \bar{\lambda}_l)\left(H_a - \sum_{j,k=1}^{N/2}\frac{H_j\check{\Gamma}_{jk}H_k^*KH_a}{\lambda_a + \bar{\lambda}_k}\right) \\ &= \prod_{l=1}^{N/2}(\lambda_a + \bar{\lambda}_l)\left(H_a - \sum_{j,k=1}^{N/2}H_j\check{\Gamma}_{jk}\Gamma_{ka}\right) = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

情形 2 的条件 $H^{\mathrm{T}}K\Omega^{2p+1}H=0$ 和情形 3 的条件 $H^{\mathrm{T}}\Theta K\Theta\Omega^{2p}H=0$ 均给出 $H_a^{\mathrm{T}}K\Omega^{N/2}H_a=0$ $(a=1,2,\ldots,N/2)$, 因此,

$$G(-\bar{\lambda}_a)\Omega^{N/2}\bar{H}_a=-\prod_{\substack{l=1\\l\neq a}}^{N/2}(-\bar{\lambda}_a+\bar{\lambda}_l)\sum_{j=1}^{N/2}H_j\check{\Gamma}_{jk}H_k^*K\Omega^{N/2}\bar{H}_k=0. \tag{4.3}$$

引理证毕. □

引理 4.2 对情形 2 和 3, 设 $(\Gamma_{jk})_{N\times N}$ 非退化, 又设

$$\Delta(\lambda)=\sum_{j=0}^{N/2-1}\Delta_j\lambda^j \tag{4.4}$$

是以 $M\times M$ 矩阵为系数的 λ 的不超过 $N/2-1$ 次多项式, 并且满足

$$\Delta(\lambda_k)H_k=0,\quad \Delta(-\bar{\lambda}_k)\Omega^{N/2}\bar{H}_k=0,\quad k=1,\ldots,\frac{N}{2}, \tag{4.5}$$

那么 $\Delta(\lambda)\equiv 0$.

引理 4.2 证明类似于文献 [26, 引理 4], 这里略去.

下面证明第 3 节中构造的 Darboux 变换在情形 1–3 均保持 V 的对称性.

定理 4.1 在上述三种情形, G 满足

$$G(-\bar{\lambda})^*KG(\lambda)=\begin{cases}(\mu^{4p+2}-\lambda^{4p+2})K, & \text{情形 1 和 2,}\\(\lambda^{2p}-\mu^{2p})^2K, & \text{情形 3,}\end{cases} \tag{4.6}$$

$$\Omega G(\lambda)\Omega^{-1}=(-1)^{N-1}G(\omega\lambda), \tag{4.7}$$

$$\overline{G(\bar{\lambda})}=G(\lambda). \tag{4.8}$$

从而, $\widetilde{V}=cG(0)V$ 满足

$$\bar{\widetilde{V}}=\widetilde{V},\quad \Omega\widetilde{V}\Omega^{-1}=\pm(-1)^{N-1}\widetilde{V},\quad \widetilde{V}^{\mathrm{T}}K\widetilde{V}=K, \tag{4.9}$$

其中

$$c=\begin{cases}\mu^{-2p-1}, & \text{情形 1 和 2,}\\\mu^{-2p}, & \text{情形 3,}\end{cases}$$

且 $\pm$ 的取法同 V 满足的对称性 (2.8) 中的相同.

证明 使得 (4.6) 成立所需的对称性已隐含在 G 的构造 (3.6) 中. 由 $\Gamma^*=\Gamma$ 得到 $\check{\Gamma}^*=\check{\Gamma}$, 由此即可直接验证 (4.6).

下面证明 (4.7).

情形 1 由 $\omega\lambda_k=\lambda_{k+1}$ 和 $\Omega H_k=H_{k+1}$ 得到 $\Gamma_{j+1,k-1}=\omega\Gamma_{jk}$. 记 $C_1=(\delta_{j,k-1})_{1\leqslant j,k\leqslant 2p+1}$, 则 $C_1\Gamma C_1=\omega\Gamma$. 所以 $C_1\check{\Gamma}C_1=\omega\check{\Gamma}$, 即 $\check{\Gamma}_{j+1,k-1}=\omega\check{\Gamma}_{jk}$. 注意到 N 是奇数时我们总取 $m=2$, 通过直接计算即可验证 (4.7).

情形 2 由 $\omega^{2p+1}=-1$ 得

$$\Delta(\lambda)=\Omega G(\lambda)+G(\omega\lambda)\Omega \tag{4.10}$$

是 λ 的不超过 $L-1=2p$ 次多项式. 注意到

$$\begin{aligned}&\omega\lambda_a=\omega^{2a-1}\mu=-\omega^{2a-2p-2}\mu=-\bar{\lambda}_{p+2-a},\\&\Omega H_a=\Omega^{2a-1}H=\Omega^{2p+1}\Omega^{2a-2p-2}H=\Omega^{2p+1}\bar{H}_{p+2-a},\\&-\omega\bar{\lambda}_a=-\omega^{-2a+3}\mu=\omega^{2p-2a+4}\mu=\lambda_{p+3-a},\\&\Omega\Omega^{2p+1}\bar{H}_a=\Omega^{2p-2a+4}H=H_{p+3-a},\end{aligned}$$

由引理 4.1 可得

$$\begin{aligned}&\Omega G(\lambda_a)H_a=0,\quad G(\omega\lambda_a)\Omega H_a=G(-\bar{\lambda}_{p+2-a})\Omega^{2p+1}\bar{H}_{p+2-a}=0,\\&\Omega G(-\bar{\lambda}_a)\Omega^{2p+1}\bar{H}_a=0,\quad G(-\omega\bar{\lambda}_a)\Omega\Omega^{2p+1}\bar{H}_a=G(\lambda_{p+3-a})H_{p+3-a}=0.\end{aligned}\tag{4.11}$$

于是, $\Delta(\lambda_a)H_a=0$, $\Delta(-\bar{\lambda}_a)\Omega^{2p+1}\bar{H}_a=0$ $(k=1,\dots,2p+1)$. 由引理 4.2 得 $\Delta(\lambda)=0$.

情形 3 由 $\omega^{2p}=-1$ 得到由 (4.10) 定义的 $\Delta(\lambda)$ 是 λ 的不超过 $L-1=2p-1$ 次多项式. 现在

$$\begin{aligned}&\omega\lambda_a=\theta\omega^{2a-1}\mu=-\bar{\theta}\omega^{2a-2p}\mu=-\bar{\lambda}_{p+1-a},\\&\Omega H_a=\Theta\Omega^{2a-1}H=\bar{\Theta}\Omega^{2p}\Omega^{2a-2p}H=\Omega^{2p}\bar{H}_{p+1-a},\\&-\omega\bar{\lambda}_a=-\bar{\theta}\omega^{-2a+3}\mu=\theta\omega^{2p-2a+2}\mu=\lambda_{p+2-a},\\&\Omega\Omega^{2p}\bar{H}_a=\Theta\Omega^{2p-2a+2}H=H_{p+2-a},\end{aligned}\tag{4.12}$$

由引理 4.1 知,

$$\begin{aligned}&\Omega G(\lambda_a)H_a=0,\quad G(\omega\lambda_a)\Omega H_a=G(-\bar{\lambda}_{p+1-a})\Omega^{2p}\bar{H}_{p+1-a}=0,\\&\Omega G(-\bar{\lambda}_a)\Omega^{2p}\bar{H}_a=0,\quad G(-\omega\bar{\lambda}_a)\Omega\Omega^{2p}\bar{H}_a=G(\lambda_{p+2-a})H_{p+2-a}=0.\end{aligned}\tag{4.13}$$

于是 $\Delta(\lambda_a)H_a=0$, $\Delta(-\bar{\lambda}_a)\Omega^{2p}\bar{H}_a=0$ $(k=1,\dots,2p)$. 由引理 4.2 得 $\Delta(\lambda)=0$.

下面再证明 (4.8).

在情形 1 时, 由 $\bar{\lambda}_k=\lambda_{2-k}$ 和 $\bar{H}_k=H_{2-k}$ 得到 $\bar{\Gamma}_{jk}=\Gamma_{2-j,2-k}$. 记 $C_2=(\delta_{j,2-k})_{1\leqslant j,k\leqslant 2n-1}$, 则 $\bar{\Gamma}=C_2\Gamma C_2^{-1}$, 从而 $\bar{\check{\Gamma}}=C_2\check{\Gamma}C_2^{-1}$, 即 $\bar{\check{\Gamma}}_{jk}=\check{\Gamma}_{2-j,2-k}$. 由此可直接验证 (4.8) 成立.

在情形 2 时成立

$$\bar{\lambda}_a=\omega^{-2a+2}\mu=\lambda_{2-a},\quad \bar{H}_a=\Omega^{-2a+2}H=H_{2-a},\tag{4.14}$$

而在情形 3 时成立

$$\bar{\lambda}_a=-\overline{\omega^{2p}\lambda_a}=-\bar{\lambda}_{p+a},\quad \bar{H}_a=\Omega^{2p}\overline{\Omega^{2p}H_a}=\Omega^{2p}\bar{H}_{p+a}.\tag{4.15}$$

与 (4.7) 的证明类似可得 $\Delta(\lambda)=\overline{G(\bar{\lambda})}-G(\lambda)\equiv 0$.

至此, 完成了 (4.6)–(4.8) 的证明. 由这三个等式可得

$$\overline{G(0)}=G(0),\quad \Omega G(0)\Omega^{-1}=(-1)^{N-1}G(0),\quad G(0)^*KG(0)=\begin{cases}\mu^{4p+2}K, & \text{情形 1 和 2},\\ \mu^{4p}K, & \text{情形 3},\end{cases}\tag{4.16}$$

所以 $\widetilde{V}$ 满足对称性 (4.9). 定理证毕. □

在 Kac-Moody 代数为 $A_{2n}^{(2)}$、$C_n^{(1)}$ 或 $D_{l+1}^{(2)}$ 时, $M=N$, 即 $r_1=r_2=\cdots=r_N=1$, 这时 V 的形式可由对称性 (2.8) 唯一确定, 从而由定理 4.1 得出, Darboux 变换将相应的二维仿射 Toda 方程的一个已知解变到一个新的解, 而对其他的 Kac-Moody 代数, 存在 $r_j>1$, 这时还需进一步考虑更多的对称性.

参考文献

1 Mikhailov A V. Integrability of a two-dimensional generalization of the Toda chain. JETP Lett, 1979, 30: 414–418

2 Álvarez-Fernández C, Mañas M. Orthogonal Laurent polynomials on the unit circle, extended CMV ordering and 2D Toda type integrable hierarchies. Adv Math, 2013, 240: 132–193

3 Ao W W, Lin C S, Wei J C. On Toda system with Cartan matrix G_2. Proc Amer Math Soc, 2015, 143: 3525–3536

4 Aratyn H, Constantinidis C P, Ferreira L A, et al. Hirota's solitons in the affine and the conformal affine Toda models. Nuclear Phys B, 1993, 406: 727–770

5 Gerdjikov V S. Two-dimensional Toda field equations related to the exceptional algebra $\mathfrak{g}_2$: Spectral properties of the Lax operators. Theoret Math Phys, 2012, 172: 1085–1096

6 Matveev V B. Darboux transformation and the explicit solutions of differential-difference and difference-difference evolution equations I. Lett Math Phys, 1979, 3: 217–222

7 Matveev V B, Salle M A. Darboux Transformations and Solitons. Heidelberg: Springer, 1991

8 Mikhailov A V, Olshanetsky M A, Perelomov A M. Two-dimensional generalized Toda lattice. Comm Math Phys, 1981, 79: 473–488

9 Nie Z H. Solving Toda field theories and related algebraic and differential properties. J Geom Phys, 2012, 62: 2424–2442

10 Bristow R, Bowcock P. Momentum conserving defects in affine Toda field theories. J High Energy Phys, 2017, 5: 153

11 Gomes J F, Sotkov G M, Zimerman A H. Nonabelian Toda theories from parafermionic reductions of the WZW model. Ann Physics, 1999, 274: 289–362

12 Gu C H, Hu H S, Zhou Z X. Darboux Transformations in Integrable Systems. Dordrecht: Springer, 2005

13 Hu H S. Laplace sequences of surfaces in projective space and two-dimensional Toda equations. Lett Math Phys, 2001, 57: 19–32

14 Hu H S. Line congruences and integrable systems. Contemp Math, 2002, 308: 179–197

15 McIntosh I. Global solutions of the elliptic 2D periodic Toda lattice. Nonlinearity, 1994, 7: 85–108

16 Razumov A V, Saveliev M V. Differential geometry of Toda systems. Comm Anal Geom, 1994, 2: 461–511

17 Rogers C, Schief W K. Bäcklund and Darboux Transformations, Geometry and Modern Applications in Soliton Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2002

18 Terng C L. Geometries and symmetries of soliton equations and integrable elliptic equations. In: Surveys on Geometry and Integrable Systems (Guest M, Miyaoka R, Ohnita Y, eds). Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 51. Tokyo: Math Soc Japan, 2008, 401–488

19 Leznov A N, Saveliev M V. Theory of group representations and integration of nonlinear systems $x_{a,z\bar{z}}=\exp(kx)_a$. Phys D, 1981, 3: 62–72

20 Leznov A N, Yuzbashjan E A. The general solution of two-dimensional matrix Toda chain equations with fixed ends. Lett Math Phys, 1995, 35: 345–349

21 Nimmo J J C, Willox R. Darboux transformations for the two-dimensional Toda system. Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci, 1997, 453: 2497–2525

22 Nirov Kh S, Razumov A V. The rational dressing for abelian twisted loop Toda systems. J High Energy Phys, 2008, 12: 048

23 Nirov Kh S, Razumov A V. More non-Abelian loop Toda solitons. J Phys A, 2009, 42: 285201

24 Zhou Z X. Darboux transformations and exact solutions of two dimensional $\mathrm{A}_{2n}^{(2)}$ Toda equation. J Math Phys, 2005, 46: 033515

25 Zhou Z X. Darboux transformations and exact solutions of two-dimensional $C_l^{(1)}$ and $D_{l+1}^{(2)}$ Toda equations. J Phys A, 2006, 39: 5727–5737

26 Zhou Z X. Darboux transformations of lower degree for two-dimensional $C_l^{(1)}$ and $D_{l+1}^{(2)}$ Toda equations. Inverse

Problems, 2008, 24: 045016
27 Zakharov V E, Mikhailov A V. On the integrability of classical spinor models in two-dimensional space-time. Comm Math Phys, 1980, 74: 21–40
28 Cieśliński J L. Algebraic construction of the Darboux matrix revisited. J Phys A, 2009, 42: 404003

Darboux transformations for the Lax pairs related to two dimensional affine Toda equations

Zixiang Zhou

Abstract Apart from the simplest algebra $A_n^{(1)}$, for any infinite series of affine Kac-Moody algebra, the corresponding two dimensional Toda equations have a unitary symmetry, a cyclic symmetry and a reality symmetry. In this paper, we construct the Darboux transformations when the order of the cyclic symmetry is odd or both the order of the cyclic symmetry and the order of the matrices are even.

Keywords **two dimensional affine Toda equation, Darboux transformation, explicit solution**

MSC(2010) 37K10, 35Q58, 35Q51

doi: 10.1360/N012017-00191