使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} | f(x) - \psi_n(x) | \mathrm{d}x < \varepsilon。$$

§4 Fourier 变换和 Fourier 积分

Fourier 变换及其逆变换

以上关于 Fourier 级数的论述都是对周期函数而言的，那么对于不具备周期性的函数，又该如何处理呢？

在$(-\infty, +\infty)$上可积的非周期函数 $f(x)$可以看成是周期函数的极限情况，处理思路是这样的：

(1) 先取 $f(x)$在$[-T, T]$上的部分(即把它视为仅定义在$[-T, T]$上的函数)，再以 $2T$ 为周期，将它延拓为$(-\infty, +\infty)$上的周期函数 $f_T(x)$；

(2) 对得到的周期函数 $f_T(x)$作 Fourier 展开；

(3) 令 T 趋于无穷大。

下面来导出具体过程。将 Euler 公式

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta})$$

代入周期为 $2T$ 的函数 $f_T(x)$的 Fourier 级数，记$\frac{\pi}{T}$是圆频率(下面就简称为频率)，$\omega_n = \frac{n\pi}{T}$，得到

$$\begin{aligned} f_T(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n x + b_n\sin\omega_n x) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n x} + \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n x}\right)。\end{aligned}$$

记

$$c_0 = a_0,$$

$$c_n = a_n - \mathrm{i}b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

$$c_{-n} = a_n + \mathrm{i}b_n = \bar{c}_n,$$

则得到

$$f_T(x) \sim \frac{c_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n x} + c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n x}) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n x},$$

这称为 **Fourier 级数的复数形式**。将 c_n 的表达式代入，即有

$$f_T(x) \sim \frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-T}^{T} f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n x}。$$

记 $\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{\pi}{T}$，于是当 $T \to +\infty$ 时 $\Delta\omega \to 0$，即得到

$$f(x) = \lim_{T\to+\infty} f_T(x) \sim \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-T}^{T} f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n x}\Delta\omega。$$

记 $\varphi_T(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$，则上式可写成

$$f(x) \sim \lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi_T(\omega_n)\Delta\omega,$$

它看上去很像 Riemann 和的极限形式，不过由于 $\Delta\omega\to 0$ 时函数 $\varphi_T(\omega)$ 将随之趋于 $\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$，因此这并非真正的 Riemann 和。但是，我们暂且不理会这些，就将它看成 $\varphi(\omega)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的"积分"，于是（形式上）有

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega。$$

我们称方括号中的函数

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \quad (\omega \in (-\infty, +\infty))$$

为 f 的 **Fourier 变换（或像函数）**，记为 $F[f]$，即

$$F[f](\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x,$$

而称函数

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \quad (x \in (-\infty, +\infty))$$

为 $\hat{f}$ 的 **Fourier 逆变换（或像原函数）**，记为 $F^{-1}[\hat{f}]$，即

$$F^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega。$$

注意这里假设了像函数与像原函数的存在性。

我们称函数

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-t)}\mathrm{d}t$$

为 f 的 **Fourier 积分**。容易想到，在一定条件下，它应与 $f(x)$ 相等，但研究这些条件已超出本课程的要求，我们不加证明地给出以下充分条件。

定理 16.4.1 设函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积，且在 $(-\infty, +\infty)$ 中的任何闭区间上分段可导。则 f 的 Fourier 积分满足：对于任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-t)}\mathrm{d}t=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}。$$

所谓在闭区间上分段可导是如下定义的:

定义 16.4.1 设函数 f 在 $[a,b]$ 上除有限个点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N=b$$

外均可导,而在 $x_i(i=0,1,2,\cdots,N)$ 处 f 的左右极限 $f(x_i-)$ 和 $f(x_i+)$ 都存在(在 $x_0=a$ 只要求右极限存在,在 $x_N=b$ 只要求左极限存在),并且极限

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(x_i+h)-f(x_i-)}{h}$$

和

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(x_i+h)-f(x_i+)}{h}$$

都存在(在 $x_0=a$ 只要求上述第二个极限存在,在 $x_N=b$ 只要求上述第一个极限存在),那么称 f 在 $[a,b]$ 上**分段可导**。

注意,若 x 是 f 的连续点,定理 16.4.1 已蕴含了

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-t)}\mathrm{d}t=f(x)。$$

请读者将定理 16.4.1 的条件和结论与关于 Fourier 级数的相应定理比较一下。

例 16.4.1 求孤立矩形波

$$f(x)=\begin{cases}h, & |x|\leqslant\delta,\\ 0, & |x|>\delta\end{cases}$$

(图 16.4.1)的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 的 Fourier 逆变换。

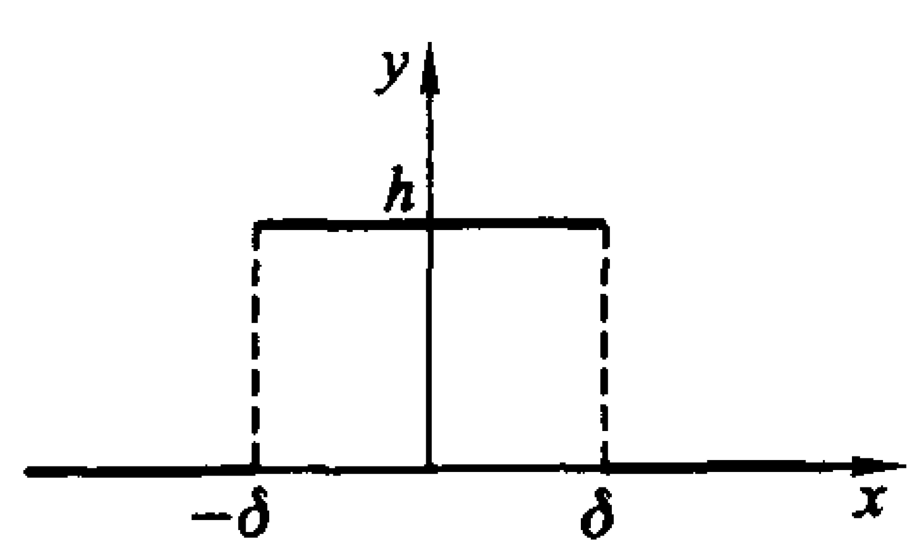


图 16.4.1

解 当 $\omega\neq0$ 时,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=h\int_{-\delta}^{\delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\\&=h\left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega}\right|_{-\delta}^{\delta}=\frac{2h}{\omega}\sin(\omega\delta),\end{aligned}$$

当 $\omega=0$ 时

$$\hat{f}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=2h\delta\left(=\lim_{\omega\to 0}\hat{f}(\omega)\right)。$$

而利用熟知的结果 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{sgn}(a)\frac{\pi}{2}$，可以求得 $\hat{f}$ 的逆变换为

$$F^{-1}[\hat{f}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega=\frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\omega\delta)}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{2h}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\omega\delta)}{\omega}\cos(\omega x)\mathrm{d}\omega=\begin{cases}h, & |x|<\delta,\\ \frac{h}{2}, & x=\pm\delta,\\ 0, & |x|>\delta。\end{cases}$$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且满足定理 16.4.1 的条件，则将 f 的 Fourier 积分的实部和虚部分开，得到

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega(x-t)\mathrm{d}t,$$

因为

$$g_s(\omega)\overset{\mathrm{def}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega(x-t)\mathrm{d}t$$

是奇函数(其中符号“$\overset{\mathrm{def}}{=}$”表示“定义为”)，而

$$g_c(\omega)\overset{\mathrm{def}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\mathrm{d}t$$

是偶函数，由此得到 $f(x)$ 的 **Fourier 积分的三角形式**(也称为**实形式**)

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\mathrm{d}t。$$

当 $f(x)$ 本身是偶函数时，上式又可化成

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t\right]\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega,$$

它可以看成是由 **Fourier 余弦变换**

$$F_c[f]=\hat{f}_c(\omega)=\int_0^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x$$

及其逆变换

$$F_c^{-1}[\hat{f}_c]=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{f}_c(\omega)\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega$$

复合而成的。

当 $f(x)$ 本身是奇函数时，可以类似地得到

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\right]\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega,$$

它可以看成是由 **Fourier 正弦变换**

$$F_s[f]=\hat{f}_s(\omega)=\int_0^{+\infty} f(x)\sin \omega x\mathrm{d}x$$

及其逆变换

$$F_s^{-1}[\hat{f}_s]=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}_s(\omega)\sin \omega x\mathrm{d}\omega$$

复合而成的。

例 16.4.2 求 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin x\,(x\in[0,+\infty))$的余弦变换。

解 由 Fourier 余弦变换公式得

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\cos \omega x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}[\sin(1+\omega)x+\sin(1-\omega)x]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-x}[\sin(1+\omega)x+(1+\omega)\cos(1+\omega)x]}{1+(1+\omega)^2}-\frac{\mathrm{e}^{-x}[\sin(1-\omega)x+(1-\omega)\cos(1-\omega)x]}{1+(1-\omega)^2}\right\}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1+\omega}{1+(1+\omega)^2}+\frac{1-\omega}{1+(1-\omega)^2}\right\}=\frac{2-\omega}{4+\omega^4}。$$

Fourier 变换的性质

Fourier 变换和 Fourier 逆变换的下列性质对于理论分析和实际计算都很有用。

(1) **线性性质**

设 c_1,c_2 是常数。若 f,g 的 Fourier 变换存在,则

$$F[c_1f+c_2g]=c_1F[f]+c_2F[g];$$

若 $\hat{f}=F[f],\hat{g}=F[g]$的 Fourier 逆变换存在,则

$$F^{-1}[c_1\hat{f}+c_2\hat{g}]=c_1F^{-1}[\hat{f}]+c_2F^{-1}[\hat{g}]。$$

证明请读者自行完成。

(2) **位移性质**

若函数 f 的 Fourier 变换存在,则

$$F[f(x\pm x_0)](\omega)=F[f](\omega)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega x_0};$$

若 $\hat{f}=F[f]$的 Fourier 逆变换存在,则

$$F^{-1}[\hat{f}(\omega\pm\omega_0)](x)=F^{-1}[\hat{f}](x)\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\omega_0 x}。$$

注 以上两式常简记为

$$F[f(x\pm x_0)]=F[f]\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega x_0};$$

$$F^{-1}[\hat{f}(\omega\pm\omega_0)]=F^{-1}[\hat{f}]\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\omega_0 x}。$$

今后类似的情况也用此种记号,而不再一一明确指出变换的函数取值。

证

$$F[f(x\pm x_0)](\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x\pm x_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(u\mp x_0)}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega x_0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u$$

$$=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega x_0}F[f](\omega)。$$

另一部分的证明留给读者自行完成。

证毕

(3) Fourier 变换还有如下性质:

时间尺度性　$F[f(ax)]=\dfrac{1}{|a|}\hat{f}\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$;

频率尺度性　$F\left[\dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{x}{a}\right)\right]=\hat{f}(a\omega)$。

证明从略。

(4) **微分性质**

1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的导数,且 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积,若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$,则有

$$F[f']=\mathrm{i}\omega\cdot F[f];$$

2) 若 $f(x)$ 和 $xf(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积,则

$$F[-\mathrm{i}x\cdot f]=(F[f])'。$$

证　1) 由分部积分公式得

$$F[f'](\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

$$=f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\mathrm{i}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{i}\omega\cdot F[f](\omega)。$$

2) $F[-\mathrm{i}x\cdot f](\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(-\mathrm{i}xf(x))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x})\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[F(f)](\omega)。$$

注意:这里的求导运算与积分运算交换了次序,其理由请读者自行说明。

证毕

(5) **积分性质**

设函数 $f(x)$ 和 $\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积,则

$$F\left[\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}F[f]。$$

证　因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=f(x),$$

且由 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 和 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的绝对可积性，易知 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=0$，所以由 Fourier 变换的微分性质得

$$F[f](\omega)=F\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right](\omega)=\mathrm{i}\omega F\left[\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right](\omega),$$

即

$$F\left[\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right](\omega)=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}F[f](\omega)。$$

证毕

卷积

现在引入卷积的概念。

定义 16.4.2　*设函数 f 和 g 在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义，且积分*

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$$

存在，则称函数 $f*g$ 为 f 和 g 的 **卷积**。

显然，卷积具有对称性，即 $f*g=g*f$。

建立以下两个定理需要更广泛意义下的积分理论，但由于其重要性，我们仍写出其结论。

定理 16.4.2（卷积的 Fourier 变换）　*设函数 f 和 g 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，则有*

$$F[f*g]=F[f]\cdot F[g]。$$

定理 16.4.3（Parseval 等式）　*设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)]^2\mathrm{d}x$ 收敛。记 f 的 Fourier 变换为 $\hat{f}$，则*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega。$$

今后学习其他课程（如偏微分方程、控制理论、计算方法等）时会知道，以上的性质和定理非常重要。下面举一个简单例子。

例 16.4.3　求解微分方程

$$u''(x)-a^2u(x)+2af(x)=0\quad(a>0\text{ 为常数},x\in(-\infty,+\infty))。$$

解　由 Fourier 变换的微分性质得

$$F[u'']=\mathrm{i}\omega F[u']=-\omega^2F[u]。$$

对方程两边作 Fourier 变换，整理后即有

$$F[u]=\frac{2a}{a^2+\omega^2}F[f]。$$

利用本节习题 1(2)的结果 $F[\mathrm{e}^{-a|x|}]=\frac{2a}{a^2+\omega^2}(a>0)$和定理 16.4.2 的结论，得到

$$u(x)=F^{-1}\left[\frac{2a}{a^2+\omega^2}\cdot F[f]\right]=F^{-1}\left[\frac{2a}{a^2+\omega^2}\right]*F^{-1}[F[f]]$$

$$=f*\mathrm{e}^{-a|x|}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-a|x-t|}\mathrm{d}t。$$

注 在这个例题中我们假设了 $f(x)$和 $u(x)$满足使运算过程成立的一切条件。下面我们指出几点：

1. Fourier 积分的三角形式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\mathrm{d}t$$

本可以由实数形式的 Fourier 级数按上述思想直接导出，这里之所以舍近求远，先化成复数形式再兜回来，是因为复数形式的 Fourier 级数和 Fourier 积分具有重要的实际应用价值。在许多领域，如热学、声学、光学、电工学、核物理学等等，都需要对复函数的频率 $\omega_n=\frac{n\pi}{T}$和振幅$|c_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$进行计算、分析(称为频谱分析)、叠加、滤波等处理，因而复数表达形式对于简化处理过程有着独到的优越性。

2. 周期函数实际上就是频率为 $\omega=\frac{\pi}{T}$的振荡函数。Fourier 级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}$$

揭示了 $f(x)$可以通过频率为 ω(称为**基频**)的正弦波 $\sin\omega x$ 和余弦波 $\cos\omega x$(称为**基波**)及其 n 次谐波 $\sin n\omega x$，$\cos n\omega x$ 叠加来得到，而谐频为 $n\omega$ 的谐波的振幅

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}=|c_n|=\frac{1}{T}\left|\int_{-T}^{T}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x\right|$$

不妨理解成该谐波在整体中的强度。

对于非周期函数，即 $T\to+\infty$的情况，这时基频 $\omega\to0$，因此谐频由离散的$\{n\omega\}$趋向于布满整个实数轴，或者可以说，此时任何一个实数(仍记为 ω)都是它的“谐频”。因此，Fourier 逆变换

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(\omega)}{\pi} e^{i\omega x} d\omega$$

同样表示 $f(x)$可由频率为 ω 的“谐波”叠加而成，$\frac{|\hat{f}(\omega)|}{\pi}$也应是相应的振幅。

而换一个角度，从 Fourier 变换的定义来看，由于

$$\frac{|\hat{f}(\omega)|}{\pi} = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx\right| = \lim_{T\to+\infty} \frac{\frac{1}{T}\left|\int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\omega x} dx\right|}{\Delta\omega},$$

与$|c_n|$的表达式比较，说明它确实能看成相应于频率 ω 的谐波在整体中的某种“强度”，与上面的结论相吻合(请读者思考，这里用 $\Delta\omega$ 除一下的用意何在)。

上面的解释有助于理解 Fourier 变换的物理意义。

习　　题

1. 求下列定义在$(-\infty,+\infty)$的函数的 Fourier 变换：

(1) $f(x) = \begin{cases} A, & 0<x<\delta, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$　　(2) $f(x) = e^{-a|x|}, a>0$;

(3) $f(x) = e^{-ax^2},\quad a>0$;　　(4) $f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0; \end{cases}$

(5) $f(x) = \begin{cases} A\cos\omega_0 x, & |x|\leqslant\delta, \\ 0, & |x|>\delta; \end{cases}$　$\omega_0\neq 0$ 是常数，$\delta=\frac{\pi}{\omega_0}$。

2. 求 $f(x)=e^{-ax}(x\in[0,+\infty), a>0)$的正弦变换和余弦变换。

3. 设 $f_1(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$　$f_2(x) = \begin{cases} \sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 求 $f_1 * f_2(x)$。

§ 5　快速 Fourier 变换

离散 Fourier 变换

人们刚开始利用无线电技术传输信号时，是将连续信号进行某种调制处理后直接传送的(图 16.5.1)，本质上传送的还是连续信号(也叫模拟信号)。这样的传输方式抗干扰能力差，失真严重，尤其是经过长距离传送或多级传递后，信号可能面目全非，质量自然难尽人意。

以后发展了离散的传输方法，它不是传送连续信号本身，而是每隔一段时间 Δt，从信号中提取一个数值脉冲(称为数值抽样)，将连续信号转化成数据序列

图 16.5.1

$x(0),x(1),x(2),\cdots,x(N-1)$(图 16.5.2),再经编码后发送。只要抽取的时间间隔足够小,这列数据就能很好地反映原信号,接收方通过逆向处理,可以复原出所传递的信号(图 16.5.3)。这种方法称为数字信号传输,具有抗干扰能力强、信号还原质量高、易于加密和解密等优点,问世后便受到广泛的重视,至今方兴未艾。

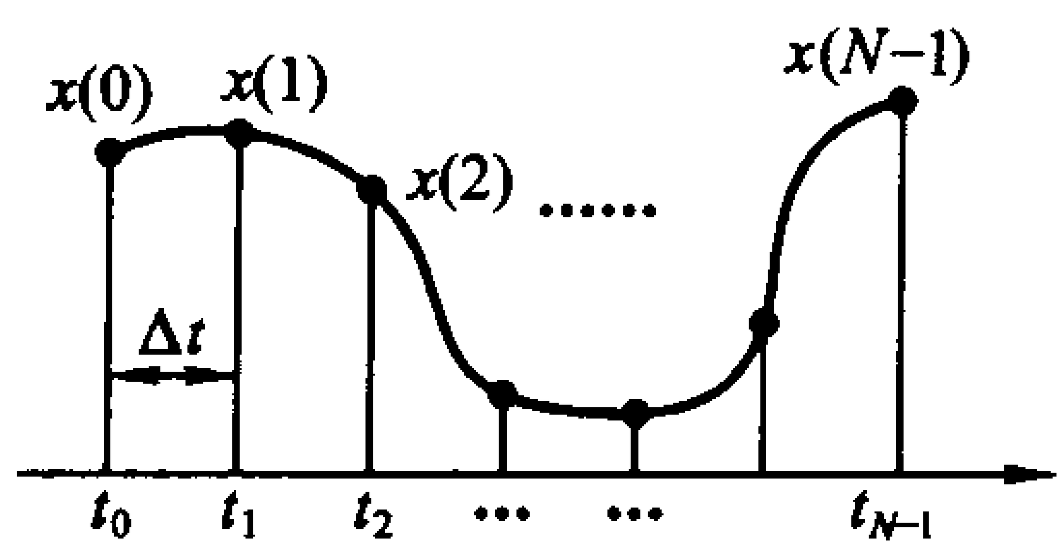


图 16.5.2

图 16.5.3

可以想见的是,为了保证接收的质量,Δt 必须取得很小,即 N 非常之大。因此,直接发送这列数据将会长时间地占用传输设备和线路,这不但需要支付昂贵的费用,在情况紧急时甚至会误事。

所以,在抽样之后需要对数据序列 $x(0),x(1),\cdots,x(N-1)$进行简化和压缩,但由于序列中数据的大小是散乱的,因此一方面我们不能随意舍弃某些数据,另一方面压缩的效果也比较差。

后来经研究发现,若对数据序列 $x(0),x(1),\cdots,x(N-1)$施以如下的**离散 Fourier 变换**

$$X(j)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{nj}{N}}\qquad(j=0,1,2,\cdots,N-1,\mathrm{i}=\sqrt{-1})$$

就可以有效地解决上面的问题。(之所以称它为“离散 Fourier 变换”,在于它可以看成是 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$ 的一种离散的近似形式的推广,

见习题 1。)

利用正交关系式

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{nj}{N}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{nk}{N}}=\delta_{j,k}=\begin{cases}1, & j=k,\\ 0, & j\neq k\end{cases}$$

(请读者自证),可以导出**离散 Fourier 逆变换**

$$x(k)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}X(j)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{jk}{N}},\quad k=0,1,2,\cdots,N-1,$$

这是因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}X(j)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{jk}{N}} &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{nj}{N}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{jk}{N}}\\ &= \sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{nj}{N}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{jk}{N}}\right]\\ &= \sum_{n=0}^{N-1}x(n)\delta_{n,k}=x(k)。\end{aligned}$$

也就是说,若发送方将 $x(0),x(1),\cdots,x(N-1)$ 作了离散 Fourier 变换后传输出去,接收方可以对收到的数据进行离散 Fourier 逆变换,再现原始信号。

从表面看来,这么做似乎毫无必要,因为变换后的数据长度仍是 N,并没有缩短,况且还要额外支出两次变换的代价。其实不然。

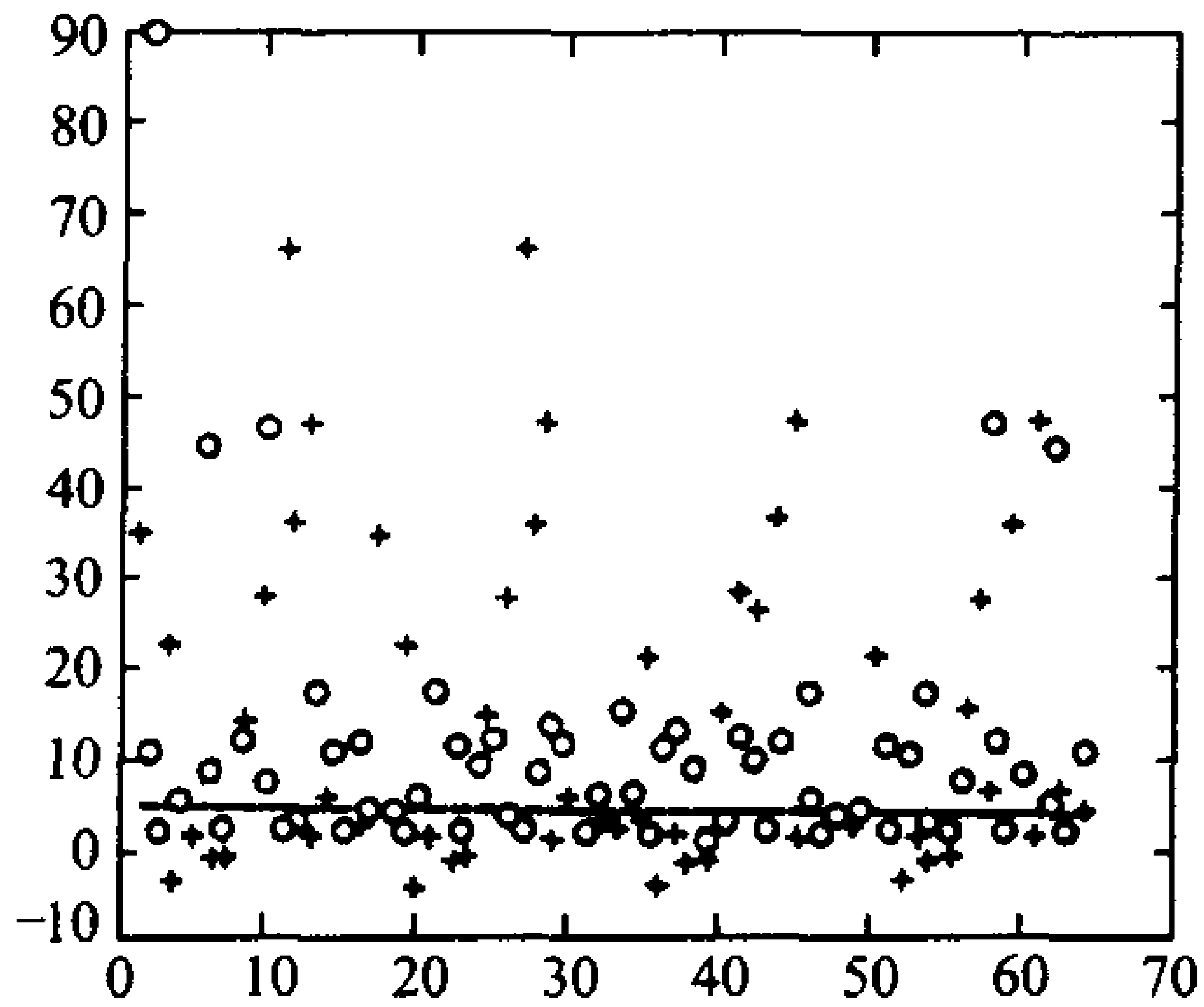
从变换公式容易看出,变换后的序列中的每个 $X(j)$,都包含了原序列中所有信号的信息。因此,即使丢失了某些 $X(j)$,仍可望由其余数据基本正确地还原出原始数据。这当然使得传输过程的抗干扰能力进一步提高,但更重要的是,这可以让我们通过有意剔除某些模较小的数据(通常这类数据数量很大)而使需传输的序列大为缩短。此外,$X(0),X(1),\cdots,X(N-1)$ 的排列将很有规律,模较大的数据往往集中在序列中一两个较窄的范围内,易于作高效的压缩处理。

例 16.5.1 对长度为 64 的序列 $\{x(k)\}$ 做离散 Fourier 变换,其取值如图 16.5.4(a)中的“+”所示,变换后的 $X(j)$ 的模用“o”表示(为了看得清楚,已做了适当比例的压缩)。

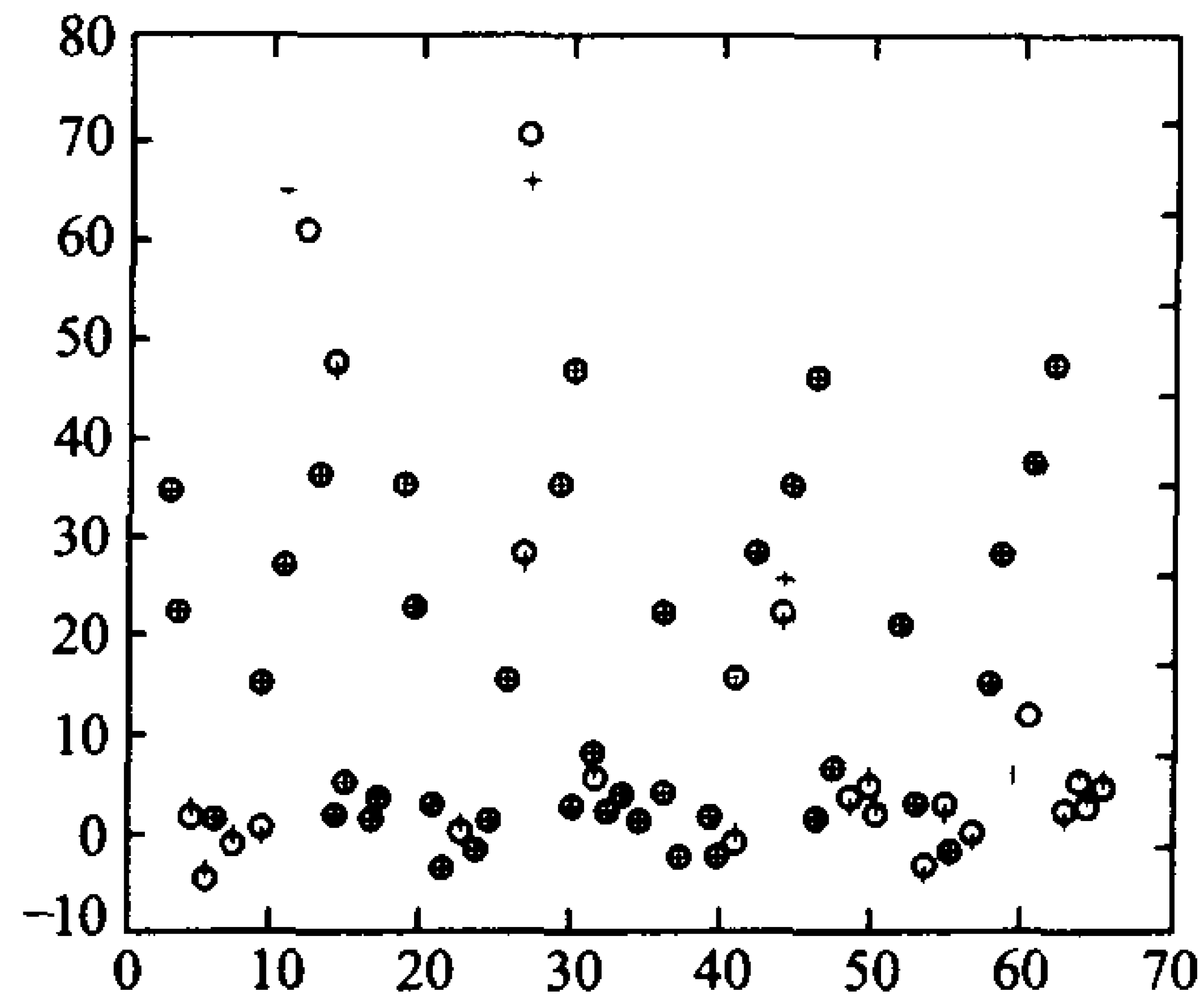
从图中可以看到,$\{x(k)\}$ 的变化很大,有高低不同的四个起伏。但做了 Fourier 变换后,$\{|X(j)|\}$ 只是在序列的起首和终止处附近有两个高的起伏,而处于序列中部的数据,其模的波动范围是不大的。也就是说,$\{X(j)\}$ 排列确实很有规律,易于作进一步的处理。

此外,我们还发现,$\{X(j)\}$ 中约有三分之一的点(虚线以下)的模接近于零。现在我们将这些点全部强行置为零后,再对整个序列进行 Fourier 逆变换,这相当在序列中删除了这些数据后再传输出去,让对方仅用剩下的那部分模较大数据进行逆变换。图 16.5.4(b)显示了所得的结果,这里 $\{x(k)\}$ 仍用“+”表示,逆变换后得到的相应值用“o”表示,我们发现,除了极个别点误差稍大之外,两

者的吻合程度是相当令人满意的。



(a)



(b)

图 16.5.4

快速 Fourier 变换

尽管早就发现离散 Fourier 变换有如此诱人的好处，但在一个相当长的时期中，人们对它基本上只限于纸上谈兵。这是因为，做一次变换需要进行 N^2 次复数乘法和 $N(N-1)$次复数加法，实际使用中的 N 总是极为巨大的，相应的高昂代价令人望而却步。

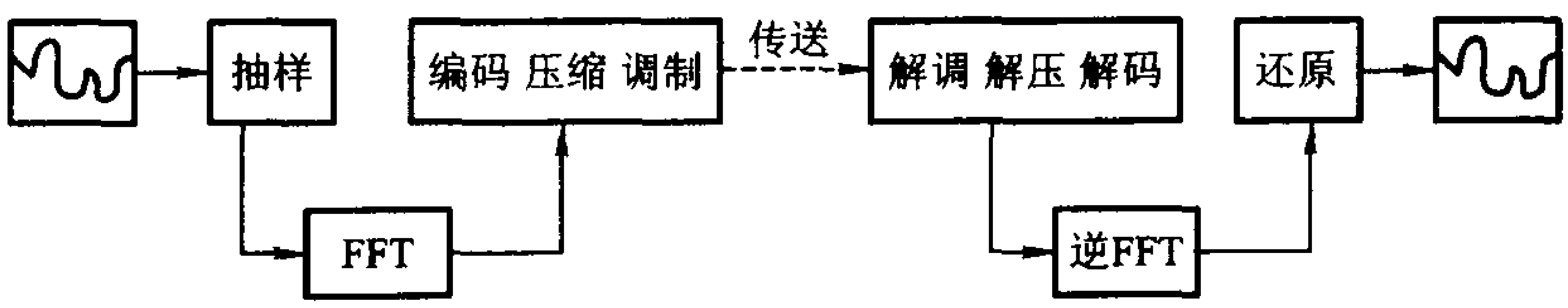


图 16.5.5

一直到 20 世纪 60 年代中期，Cooley 和 Tukey 发现了计算离散 Fourier 变换的高效(同时又特别适合于计算机硬件操作)的方法 —— **快速 Fourier 变换**(简称 **FFT**—Fast Fourier Transform)之后，它才真正获得了生命力。可以毫不夸张地说，基于 FFT 的离散 Fourier 变换技术，是当今信息传输(图 16.5.5)、频谱分析、图像处理、数据压缩等领域中最重要的数学工具之一。目前，国际上任何一个综合的数学软件中，必定含有 FFT 的计算程序。

下面对 FFT 的思想作一简单介绍(由于逆 FFT 的形式与 FFT 完全相同，因此所有的方法和结论都可以平行地用到逆 FFT 上去)。

设 $N=2m$，将 j 和 n 分别改写成

$$j = mj_1 + j_0, \begin{cases} j_0 = 0,1,\cdots,m-1, \\ j_1 = 0,1 \end{cases}$$

和

$$n=2n_1+n_0,\begin{cases}n_0=0,1,\\ n_1=0,1,\cdots,m-1,\end{cases}$$

记 $W_N=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{N}}$,则

$$W_N^2=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{m}}=W_m,\quad W_N^m=\mathrm{e}^{-\pi i}=-1,\quad W_N^{2m}=W_N^N=1,$$

而

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}&=(W_N)^{nj}=(W_N)^{(2n_1+n_0)(mj_1+j_0)}\\&=(W_N)^{2mn_1j_1}(W_N)^{mn_0j_1}(W_N)^{2n_1j_0}(W_N)^{n_0j_0}=(-1)^{n_0j_1}\cdot(W_m)^{n_1j_0}\cdot(W_N)^{n_0j_0}。\end{aligned}$$

将上式代入离散 Fourier 变换公式,并记 $X(j)$为 $X(j_1,j_0)$,

$$\begin{aligned}X(j)=X(j_1,j_0)&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}\\&=\sum_{n_1=0}^{m-1}\sum_{n_0=0}^{1}x(2n_1+n_0)(-1)^{n_0j_1}\cdot(W_m)^{n_1j_0}\cdot(W_N)^{n_0j_0}\\&=\sum_{n_0=0}^{1}(-1)^{n_0j_1}\left[(W_N)^{n_0j_0}\sum_{n_1=0}^{m-1}x(2n_1+n_0)(W_m)^{n_1j_0}\right],\end{aligned}$$

将方括号中的部分记为 $z(n_0,j_0)$,则计算 $X(j)(j=0,1,2,\cdots,N-1)$可分解为两个步骤进行:

$$\begin{cases}z(n_0,j_0)=(W_N)^{n_0j_0}\displaystyle\sum_{n_1=0}^{m-1}x(2n_1+n_0)(W_m)^{n_1j_0},& n_0=0,1;j_0=0,1,\cdots,m-1,\\ X(j_1,j_0)=\displaystyle\sum_{n_0=0}^{1}(-1)^{n_0j_1}\cdot z(n_0,j_0),& j_1=0,1;j_0=0,1,\cdots,m-1。\end{cases}$$

实际处理数据时,因子$(W_m)^{n_1j_0}$和$(W_N)^{n_0j_0}$都是事先算好存储在计算机内的。因此,在第一式中,每一个 $z(n_0,j_0)$需要进行 m 次复数乘法和 $m-1$ 次复数加法,第二式中,每一个 $X(j_1,j_0)$只需要做 $m-1$ 次复数加法而不需要做复数乘法,所以总共需要做 mN 次复数乘法和 $2(m-1)N$ 次复数加法。

若 $N=2^k$,则 $m=2^{k-1}$仍是偶数,因此可对第一式中的

$$\sum_{n_1=0}^{m-1}x(2n_1+n_0)(W_m)^{n_1j_0}$$

继续进行上述处理,以进一步减少计算量。这样一种反复递减,直到 $m=2$ 为止的过程称为以 2 为底的快速 Fourier 变换(附带说明,任何一个大于 1 的自然数都可以作为快速 Fourier 变换的底,在同一个计算过程中还可以混合使用多个底数,参见习题。)

容易推导出,对 $N=2^k$,执行一个以 2 为底的完整的 FFT,只需要进行 $\frac{kN}{2}=\frac{1}{2}N\log_2 N$ 次复数乘法和 $kN=N\log_2 N$ 次复数加法。由于

$$\frac{\log_2 N}{N}\to 0,\quad N\to\infty,$$

因此它比原来需要 N^2 次运算的直接算法在数量级上有了重大改进，节省的工作量相当惊人，比如，对 $N=2^{10}=1024$（对于实际问题来讲，这仅是一个很小的数字），原算法的复数乘法次数就超过 FFT 的 200 倍！

FFT 还为离散 Fourier 变换开拓出了许多新的用途，计算数列的卷积就是一个典型的例子。

设 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 和 $\{y(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 都是实的或复的数列，定义它们的卷积为

$$x(k)*y(k)\overset{\text{def}}{=}\sum_{j=0}^{N-1}x(j)y(k-j)=z(k),\quad k=0,1,\cdots,N-1,$$

（当序号不属 0 到 $N-1$ 范围时，规定 $x(k\pm N)=x(k)$ 和 $y(k\pm N)=y(k)$。），这与上一节中定义的函数的卷积是很相像的。

显然，若直接按上式计算，要得到 $\{z(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 总共约需做 $2N^2$ 次运算，其中加法和乘法基本上各占一半。这与用直接方法做一次离散 Fourier 变换的计算量是相同的，并非是一种有效的方法。

考虑到函数的卷积与 Fourier 变换的关系，可以猜想，数列的卷积可能与离散 Fourier 变换会有类似的关系。若果真是这样，那么 FFT 就可以在其中找到用武之地。

设 $\{x(k)\}$ 和 $\{y(k)\}$ 的离散 Fourier 变换分别为 $\{X(j)\}_{j=0}^{N-1}$ 和 $\{Y(j)\}_{j=0}^{N-1}$，即

$$X(j)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)(W_N)^{nj},\quad Y(j)=\sum_{m=0}^{N-1}y(m)(W_N)^{mj},$$

则它们对应项的相乘为

$$X(j)Y(j)=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(n)y(m)(W_N)^{(n+m)j},$$

利用

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(W_N)^{nj}(W_N)^{-nk}=\delta_{j,k},$$

于是，数列 $\{X(j)Y(j)\}_{j=0}^{N-1}$ 的离散 Fourier 逆变换为

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}X(j)Y(j)e^{2\pi i\frac{jk}{N}}&=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\Big[\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(n)y(m)(W_N)^{(m+n)j}\Big](W_N)^{-kj}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(n)y(m)\Big[\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(W_N)^{(m+n)j}(W_N)^{-kj}\Big]\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(n)y(m)\delta_{m+n,k}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y(k-n)=z(k)。\end{aligned}$$

这就是说，**两个数列卷积的离散 Fourier 变换，等于由这两个数列分别的离散 Fourier 变换的对应项乘积构成的数列**，请读者与定理 16.4.2 的结论加以比较。

于是，计算 $\{x(k)\}$ 和 $\{y(k)\}$ 的卷积 $\{z(k)\}$ 的过程可以分成三步：

(1) 分别做 $\{x(k)\}$ 和 $\{y(k)\}$ 的离散 Fourier 变换 $\{X(j)\}$ 和 $\{Y(j)\}$；

(2) 求 $X(j)Y(j),j=0,1,\cdots,N-1$；

(3) 做 $\{X(j)Y(j)\}$ 的离散 Fourier 逆变换，得到 $\{z(k)\}$。

上述过程需要两次离散 Fourier 变换和一次离散 Fourier 逆变换（步骤(2)中的乘法计算量可以忽略不计），若用直接计算的方法做变换，总计算量将达到直接求卷积时的三倍，无疑是大大地划不来。因此尽管这个结果早就为人所知，但在 FFT 问世之前，就实际问题计算而

言，从来就是无人问津的。

有了 FFT 之后情况立即改观。因(1)和(3)用 FFT 做，总共只需 $4.5N\log_2 N$ 次运算，其中仅三分之一为乘法，而(2)只需 $2N$ 次运算，所以虽说是绕了一个圈子，计算量反倒大为减少，并且，当 N 很大时，减少的数目是相当可观的。

由 FFT 方法出发，产生了很大一类基于卷积计算的快速算法。比如，要计算两个 n 次多项式 $p_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$ 和 $q_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kx^k$ 的乘积

$$r_{2n}(x) = p_n(x)q_n(x) = \sum_{k=0}^{2n}c_kx^k$$

(次数不一样时，可将高次幂的系数视为 0)，直接求系数

$$c_k = \sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}, \quad k = 0,1,\cdots,2n,$$

将是事倍功半的。若观察到 c_k 的形式与卷积非常相像，进而令数列 $\{A(k)\}$ 和 $\{B(k)\}$ 分别为

$$A(k)=\begin{cases}a_k, & 0\leqslant k\leqslant n,\\ 0, & n<k\leqslant 2n,\end{cases} \qquad B(k)=\begin{cases}b_k, & 0\leqslant k\leqslant n,\\ 0, & n<k\leqslant 2n,\end{cases}$$

则不难验证 $\{c_k\}$ 正是 $\{A(k)\}$ 和 $\{B(k)\}$ 的卷积，于是前面关于卷积的高效的计算方案可以毫不走样地全部照搬 —— 这就是求多项式乘积的快速算法。

求两个级数的 Cauchy 乘积的处理是类似的，某些类型的矩阵乘法也可以从卷积入手导出快速算法，这里不再一一介绍了。

习　题

1. 说明离散 Fourier 变换 $X(j) = \sum\limits_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-2\pi i\frac{nj}{N}}$ 可以看成 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

的离散近似形式的推广。

2. 证明正交关系式

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-2\pi i\frac{nj}{N}}e^{2\pi i\frac{nk}{N}} = \delta_{j,k}。$$

3. 设 $N=pq(p,q\in\mathbf{N})$，构造只需 $O((p+q)N)$ 次运算的 Fourier 变换算法。
4. 对 $N=2^3$，具体写出以 2 为底的 FFT 的计算流程。

计算实习题

（在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算）

1. 利用现成的数学通用软件(如 MATLAB、Mathematica、Maple 等)，对于 $N=32,64,128$，