3. 如果复数 z 满足 $|z+\mathrm{i}|-|z-\mathrm{i}|=2$,求 $|z+\mathrm{i}+1|$ 的最小值.

4. 在复平面上,正方形 $ABCD$ 的两个顶点 A, B 对应的复数分别为 $1+2\mathrm{i}$, $3-5\mathrm{i}$. 求另外两个顶点 C, D 对应的复数.

5. (1) 若 $z\in\mathbf{C}$ 且 $|z+2-2\mathrm{i}|=1$,求 $|z-2-2\mathrm{i}|$ 的最小值;

(2) 若 $z\in\mathbf{C}$ 且 $|z+3+4\mathrm{i}|\leqslant 2$,求 $|z|$ 的最大值.

6. 已知复数 z 满足 $|z|=\sqrt{2}$, z^2 的虚部为 2.

(1) 求 z;

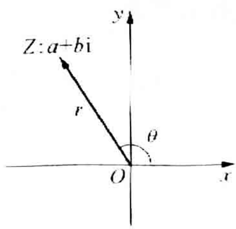
(2) 设 z、z^2、$z-z^2$ 在复平面上的对应点分别为 A、B、C,求 $\triangle ABC$ 的面积.

7. 已知复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=\sqrt{7}+1$, $|z_2|=\sqrt{7}-1$,且 $|z_1-z_2|=4$,求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 与 $|z_1+z_2|$ 的值.

8. 已知 $|z|=1$,且 $z^5+z=1$,求复数 z.

8.4 复数的三角形式
(Trigonometric form of Complex Number)

设非零复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a, b\in\mathbf{R})$ 在复平面上所对应的点是 $Z(a, b)$,所对应的向量是 $\overrightarrow{OZ}$,则以实轴的正半轴为始边,向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在的射线为终边的角 θ 叫做复数 z 的**辐角**,记作 $\mathrm{Arg}\, z$. 非零复数 z 的辐角有无限多个值,这些值中的任意两个相差 2π 的整数倍. 我们把适合于 $\theta\in[0, 2\pi)$ 的辐角 θ 的值,叫做复数 z 的**辐角主值**,记作 $\arg z$. 易知复数 z 的辐角与辐角主值满足关系 $\mathrm{Arg}\, z=2k\pi+\arg z$ $(k\in\mathbf{Z})$.



这样,非零复数与它的一组模和辐角主值是一一对应的. 两个非零复数当且仅当它们的模与辐角主值分别相等时才相等.

若复数 $z=0$,则所对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是零向

量. 零向量的方向是任意的，所以复数 0 的辐角也是任意的，辐角主值可以取$[0,\ 2\pi)$ 内的任意一个值.

设 $|\overrightarrow{OZ}| = r\ (r > 0)$，根据三角比的定义，我们有 $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$，$\sin\theta = \dfrac{b}{r}$，即 $a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta$，所以 $z = a + bi = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

这里 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ 就是复数 $a + bi$ 的模，θ 是 $a + bi$ 的一个辐角. 特别地，复数 0 也可以写作 $0 = 0(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. 由此可见，任意复数 $a + bi$ 都可以表示成 $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\ (r \geqslant 0)$ 的形式.

我们把 $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$叫做**复数 $a+bi$ 的三角形式**. 其中 r 是复数 $a + bi$ 的模，θ 是 $a + bi$ 的一个辐角.

下面我们利用复数的三角形式来研究复数的乘法、除法、乘方及开方运算.

设复数 $z_1 = r_1(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(r_1 \geqslant 0)$，$z_2 = r_2(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)(r_2 \geqslant 0)$，按复数的代数形式的乘法法则有

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) \cdot r_2(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \\
&= r_1 r_2[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)] \\
&= r_1 r_2[\cos(\alpha + \beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha - \beta)],
\end{aligned}
$$

即两个复数相乘，积的模等于两个复数模的积，积的辐角等于两个辐角的和.

除法是乘法的逆运算，即当 $z_2 \neq 0$ 时，商$\dfrac{z_1}{z_2}$ 是指满足 $z_2 \cdot z = z_1$ 的复数 z. 因为

$$r_2(\cos\beta - \mathrm{i}\sin\beta) \cdot \frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha - \beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha - \beta)] = r_1(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha),$$

所以 $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)}{r_2(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha - \beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha - \beta)],$$

即两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的

辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差.

复数三角形式的乘法法则可以推广到 n 个复数:

$$r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\cdot\cdots\cdot r_n(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n)$$
$$=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1-\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)].$$

如果在上式中取 $r_1=r_2=\cdots=r_n=r$, $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$,即得

$$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)\ (n\in\mathbf{N}),$$

即复数的 n $(n\in\mathrm{N})$次幂的模等于这个复数的模的 n 次幂,它的辐角等于这个复数辐角的 n 倍,这个定理叫做**棣莫弗定理**.

设复数 $z_0=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ $(r>0,\ n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N})$ 的 n 次方根为 $z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ $(\rho\geqslant 0)$, 则 $z^n=z_0$, 即$[\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,所以$\begin{cases}\rho^n=r,\\ n\varphi=\theta-2k\pi,\ k\in\mathbf{Z},\end{cases}$

解得
$$\rho=\sqrt[n]{r},\ \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n},\ k\in\mathbf{Z}.$$

因此 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根为$\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$.

显然复数 0 的 n 次方根仍然是 0.

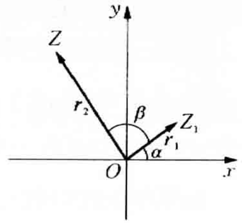
当 k 取 0, 1, 2, …, $n-1$ 各值时,可以得到$\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$的 n 个不同的值(因为它们中任意两个的商都不为 1). 而当 k 取其他的整数值时,可以证明所得到的值必与前面已取得的 n 个值重复. 所以,非零复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根是 n 个复数,它们是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

上一节我们曾研究了复数的加法与减法的几何意义,现在应用复数三角形式的乘法、除法法则,可以继续研究复数乘法、除法的几何意义.

设复数 $z_1=r_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$ $(r_1\geqslant 0)$ 对应的向量为$\overrightarrow{OZ_1}$, $z_2=$

$r_2(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)$ $(r_2\geqslant 0)$，由 $z_1\cdot z_2=r_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\cdot r_2(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)=r_1r_2[\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)]$ 可知，把向量$\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 逆时针旋转角 β(当 $\beta<0$ 时，实际上是顺时针旋转角 $-\beta$)；再把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 的模换成 $r_2\cdot|\overrightarrow{OZ_1}|$，即得积 $z_1\cdot z_2$ 对应的向量$\overrightarrow{OZ}$.



由复数三角形式的除法法则 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)}{r_2(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha-\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha-\beta)]$ $(r_2\neq 0)$ 知，把向量$\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 顺时针旋转角 β（当 $\beta<0$ 时，实际上是逆时针旋转角 $-\beta$)；再把$\overrightarrow{OZ_1}$ 的模换成$\dfrac{1}{r_2}\cdot|\overrightarrow{OZ_1}|$，即得商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 对应的向量.

例 1　求下列复数的辐角主值，并将其表示成三角形式：

(1) $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$;

(2) $3-\mathrm{i}$;

(3) $\tan\theta+\mathrm{i},\ \theta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$;

(4) $1+\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha,\ \alpha\in[0,\ 2\pi)$.

解　(1) 因为 $|-1-\sqrt{3}\mathrm{i}|=2,\ \cos\theta=-\dfrac{1}{2},\ \sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\arg(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})=\dfrac{4\pi}{3}$.

所以 $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

(2) 因为 $|3-\mathrm{i}|=\sqrt{10},\ \cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}},\ \sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，所以 $\arg(3-\mathrm{i})=2\pi-\arctan\dfrac{1}{3}$.

所以 $3-\mathrm{i}=\sqrt{10}\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{10}\left[\cos\left(2\pi-\arctan\dfrac{1}{3}\right)+\right.$

$\mathrm{i}\sin\left(2\pi-\arctan\dfrac{1}{3}\right)\Big]$.

(3) 因为 $\tan\theta+\mathrm{i}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\mathrm{i}=\dfrac{1}{\cos\theta}(\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)$.

当 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$\cos\theta>0$,所以 $\tan\theta+\mathrm{i}=\dfrac{1}{\cos\theta}\Big[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+$ $\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\Big]$;

当 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时,$\cos\theta<0$,所以 $\tan\theta+\mathrm{i}=-\dfrac{1}{\cos\theta}\Big[\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)+$ $\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)\Big]$.

(4) 因为 $1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\cdot 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

当 $0\leqslant\alpha<\pi$ 时,$0\leqslant\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$,所以

$$1+\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\right);$$

当 $\pi\leqslant\alpha<2\pi$ 时,$\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{\alpha}{2}<\pi$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}<0$,所以

$$1+\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=-2\cos\frac{\alpha}{2}\left(-\cos\frac{\alpha}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=-2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

例 2 已知 $k\in\mathbf{R}$,复数 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$.

(1) 当 k 和 θ 分别为何值时,复数 $z^3+k\bar{z}^3$ 是纯虚数;

(2) 当 θ 变化时,求出 $|z^3+k\bar{z}^3|$ 的最大值和最小值.

解 (1) 因为 $z^3+k\bar{z}^3=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3+k(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^3$

$$=(\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta)+k(\cos 3\theta-\mathrm{i}\sin 3\theta)$$
$$=(1+k)\cos 3\theta+(1-k)\mathrm{i}\sin 3\theta,$$

所以当复数 $z^3+k\bar{z}^3$ 是纯虚数时,有$(1+k)\cos 3\theta=0$, $(1-k)\sin 3\theta\neq 0$.

所以当 $k=-1$, $\theta\neq\dfrac{n\pi}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$或$k\neq 1$,$\theta=\dfrac{n\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}$, $n\in\mathbf{Z}$时,$z^3+k\bar{z}^3$ 是纯虚数.

(2) 因为 $|z^3+k\bar{z}^3|=|(1+k)\cos 3\theta+(1-k)\mathrm{i}\sin 3\theta|$
$$=\sqrt{(1+k)^2\cos^2 3\theta+(1-k)^2\sin^2 3\theta}$$
$$=\sqrt{1+k^2+2k\cos 6\theta},$$

所以当 $k\geqslant 0$ 时,最大值为 $1+k$,最小值为 $|1-k|$;当 $k<0$ 时,最大值为$1-k$, 最小值为 $|1+k|$.

例 3 设复数 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\cos\theta\ (0<\theta<\pi)$, $\omega=\dfrac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}$,并且 $|\omega|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\arg\omega<\dfrac{\pi}{2}$,求 θ.

解 因为 $\omega=\dfrac{1-[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]^4}{1+[\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta]^4}=\dfrac{1-\cos(-4\theta)-\mathrm{i}\sin(-4\theta)}{1+\cos 4\theta+\mathrm{i}\sin 4\theta}$
$$=\frac{2\sin^2 2\theta+2\mathrm{i}\sin 2\theta\cos 2\theta}{2\cos^2 2\theta+2\mathrm{i}\sin 2\theta\cos 2\theta}=\tan 2\theta(\sin 4\theta+\mathrm{i}\cos 4\theta),$$

所以 $|\omega|=|\tan 2\theta|\cdot|\sin 4\theta+\mathrm{i}\cos 4\theta|=|\tan 2\theta|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,得 $\tan 2\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 $0<\theta<\pi$,所以

(1) 当 $\tan 2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 得 $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ 或 $\theta=\dfrac{7\pi}{12}$, 这时都有 $\omega=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$,得 $\arg\omega=\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$,符合题意.

(2) 当 $\tan 2\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 得 $\theta=\dfrac{5\pi}{12}$ 或 $\theta=\dfrac{11\pi}{12}$,这时都有 $\omega=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$,得 $\arg\omega=\dfrac{11\pi}{6}>\dfrac{\pi}{2}$,不合题意,舍去.

综合(1)、(2)知 $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ 或 $\theta=\dfrac{7\pi}{12}$.

例 4 复数 z 满足条件 $|z|=1$，求 $|2z^2-z+1|$ 的最大值和最小值.

解 因为 $|z|=1$，设 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，得

$$
\begin{aligned}
|2z^2-z-1| &= |2(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2-(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)+1| \\
&= |(2\cos2\theta-\cos\theta+1)+(2\sin2\theta-\sin\theta)\mathrm{i}| \\
&= \sqrt{(2\cos2\theta-\cos\theta+1)^2+(2\sin2\theta-\sin\theta)^2} \\
&= \sqrt{8\cos^2\theta-6\cos\theta+2} \\
&= \sqrt{8\left(\cos\theta-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{7}{8}},
\end{aligned}
$$

所以，当 $\cos\theta=\dfrac{3}{8}$ 时，$|2z^2-z-1|_{\min}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$；当 $\cos\theta=-1$ 时，$|2z^2-z+1|_{\max}=4$.

例 5 在复平面上，一个正方形的四个顶点按照逆时针方向依次为 Z_1，Z_2，Z_3，O(其中 O 是原点)，已知 Z_2 对应复数 $z_2=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，求 Z_1、Z_3 对应的复数.

解一 设 Z_1、Z_3 对应的复数分别为 z_1、z_3，则由复数乘除法的几何意义有：

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}z_2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}z_2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

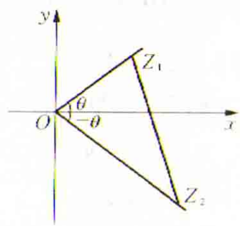
解二 设 Z_1、Z_3 对应的复数分别是 z_1、z_3，根据复数加法和乘法的几何意义，依题意得

$$\begin{cases} z_1 + z_3 = z_2, \\ z_3 - z_1 = \mathrm{i}z_2, \end{cases}$$

所以
$$z_1 = \frac{1}{2}z_2(1-\mathrm{i}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2};$$

$$z_3 = z_2 - z_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

例 6 设点 O 为复平面的原点，Z_1 和 Z_2 为复平面内的两动点，并且满足：(1) Z_1 和 Z_2 所对应的复数的辐角分别为定值 θ 和 $-\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，(2) $\triangle OZ_1Z_2$ 的面积为定值 S. 求 $\triangle OZ_1Z_2$ 的重心 Z 所对应的复数的模的最小值.



解 设 Z_1，Z_2 和 Z 对应的复数分别为 z_1，z_2 和 z，其中 $z_1 = r_1(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，$z_2 = r_2(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)$.

由于 Z 是 $\triangle OZ_1Z_2$ 的重心，根据复数加法的几何意义，则有

$$3z = z_1 + z_2 = (r_1 + r_2)\cos\theta + (r_1 - r_2)\mathrm{i}\sin\theta,$$

于是
$$\begin{aligned} |3z|^2 &= (r_1 + r_2)^2\cos^2\theta + (r_1 - r_2)^2\sin^2\theta \\ &= (r_1 - r_2)^2\cos^2\theta + 4r_1r_2\cos^2\theta + (r_1 - r_2)^2\sin^2\theta \\ &= (r_1 - r_2)^2 + 4r_1r_2\cos^2\theta. \end{aligned}$$

又知 $\triangle OZ_1Z_2$ 的面积为定值 S 及 $\sin 2\theta > 0$ $\left(由于 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，所以

$$\frac{1}{2}r_1r_2\sin 2\theta = S，即\ r_1r_2 = \frac{2S}{\sin 2\theta},$$

由此得，$|3z|^2=(r_1-r_2)^2+\dfrac{8S\cos^2\theta}{\sin 2\theta}=(r_1-r_2)^2+4S\cot\theta$，

故当 $r_1=r_2=\sqrt{\dfrac{2S}{\sin 2\theta}}$ 时，$|z|$ 最小，且 $|z|_{最小值}=\dfrac{2}{3}\sqrt{S\cot\theta}$.

习题练习

·自己练

1. 将下列复数表示成三角形式.

(1) $\left(\dfrac{4}{-\sqrt{6}+\sqrt{2}\mathrm{i}}\right)^3$；

(2) $5-12\mathrm{i}$；

(3) $\sqrt{3}\cdot\sin\alpha+\cos\alpha-2\mathrm{i}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

2. (1) 计算：$\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right]}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^2}$；

(2) 设复数 z 满足 $\left|\dfrac{z-1}{z}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\arg\dfrac{z-1}{z}=\dfrac{\pi}{3}$，求 z.

3. 设复数 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，$\theta\in(\pi,2\pi)$，求复数 z^2+z 的模和辐角.

4. 设 z_1、z_2 是两个虚数，且 $z_1+z_2=-3$，$|z_1|+|z_2|=4$. 若 $\theta_1=\arg z_1$，$\theta_2=\arg z_2$，求 $\cos(\theta_1-\theta_2)$ 的最大值.

5. 设复数 $z=3\cos\theta+\mathrm{i}\cdot 2\sin\theta$，求函数 $y=\theta-\arg z\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最大值以及对应的 θ 值.

6. 把复数 z_1 与 z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 分别按逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\dfrac{5\pi}{3}$ 后，重合于向量 $\overrightarrow{OM}$ 且模相等，已知 $z_2=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，求复数 z_1 的代数式和它的辐角主值.

7. 在复平面内，已知等边三角形的两个顶点所表示的复数分别为 2 和 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，求第三个顶点所表示的复数.

8. 设 $\omega=z+a\mathrm{i}$, 其中 a 是实数, i 是虚数单位, $z=\dfrac{(1-4\mathrm{i})(1+\mathrm{i})+2+4\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$, 且 $|\omega|\leqslant\sqrt{2}$, 求 ω 的辐角主值 θ 的取值范围.

9. 已知复数 z_1、z_2、z_1+z_2 在复平面上分别对应点 A、B、C, O 为复平面的原点.

(1) 若 $z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, 向量 $\overrightarrow{OA}$ 逆时针旋转 90°, 模变为原来的 2 倍后与向量 $\overrightarrow{OC}$ 重合, 求 z_2;

(2) 若 $z_1-z_2=2\mathrm{i}(z_1+z_2)$, 试判断四边形 $OACB$ 的形状.

10. 已知复数 z_1、z_2 分别对应复平面上的点 Z_1、Z_2, 且 z_1、z_2 满足条件: $z_2=-az_1\mathrm{i}\ (a\in\mathbf{R}^+)$, $|z_1|+|z_2|+|z_1-z_2|=10$.

(1) 当 a 为何值时, $\triangle Z_1OZ_2$ 的面积取得最大值? 并求出这个最大值;

(2) 当 $\triangle Z_1OZ_2$ 面积取得最大值时, 求动点 Z_1 的轨迹.

8.4 复数的三角形式

1. (1) $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$ (2) $13\left[\cos\left(-\arccos\dfrac{5}{13}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\arccos\dfrac{5}{13}\right)\right]$ (3) $2\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}+\alpha\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}+\alpha\right)\right]$ **2.** (1) 8 (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}+\mathrm{i})$ **3.** 模为 $-2\cos\dfrac{\theta}{2}$, 辐角为 $2k\pi+\pi+\dfrac{3}{2}\theta\ (k\in\mathbf{Z})$ **4.** $\dfrac{1}{8}$ **5.** 当 $\theta=\arctan\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 时, y 取最大值 $\arctan\dfrac{\sqrt{6}}{12}$ **6.** $-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$, 辐角主值为 $\dfrac{3\pi}{4}$ **7.** $2+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 或 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ **8.** $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{7\pi}{4},2\pi\right)$ **9.** (1) $z_2=\dfrac{-2-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$ (2) 菱形 **10.** (1) 当 $a=1$ 时 $\triangle Z_1OZ_2$ 的面积取得最大值为 $25(3-2\sqrt{2})$ (2) 轨迹是以原点为圆心, $5(2-\sqrt{2})$ 为半径的圆