6.4 反三角函数

(Inverse Trigonometric Functions)

三角函数解决知道角求三角函数值的问题,例如 $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,这类问题称作"知角求值"问题.在科学研究和生产实践中还会遇到大量的知道三角函数值,需要求角的问题,例如知道 $\sin x=\dfrac{1}{2}$, $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, x 是什么?这类问题称作"知值求角"问题.

"知角求值"与"知值求角"关系十分密切,其本质是函数与反函数的问题.

若确定函数 $y=f(x)$的映射是一一映射,则 $y=f(x)$存在反函数.

因为三角函数都是周期函数,所以定义三角函数的映射不是一一对应的,从而三角函数不存在反函数.造成了正弦函数 $y=\sin x$ 无法构成一一映射的决定因素是定义域!

我们要寻找这样的集合 A,使得对于每一个正弦值(落在区间$[-1,1]$内),在集合 A 中有且只有唯一的弧度数为 x 的角与之对应.

满足条件的集合是 $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

对于每一个整数 k,函数 $y=\sin x\left(x\in\left[k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$都有反函数.

在三角问题的研究中使用频率最高的是锐角,因此我们在确定反正弦函数时,就锁定了函数 $y=\sin x,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

定义 把函数 $y=\sin x,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$的反函数叫做**反正弦函**

数(inverse sine function),记作 $y=\arcsin x, x\in[-1, 1]$.

对定义的理解:

(1) $\arcsin x$ 表示一个角;

(2) $\arcsin x$ 是落在区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$内的角;

(3) $\arcsin x$ 的正弦值是 x,即 $\sin(\arcsin x)=x,\ x\in[-1, 1]$.

总之 $\arcsin x$ 是一个落在区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$内正弦值是 x 的角.

例 1 求下列反正弦函数的值:

(1) $\arcsin\frac{1}{2}$; (2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; (3) $\arcsin 0$;

(4) $\arcsin 1$; (5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; (6) $\arcsin(-1)$.

解 (1) $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

(2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

(3) $\arcsin 0=0$.

(4) $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$.

(5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$.

(6) $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$.

反正弦函数的性质:

(1) $y=\arcsin x$ 在$[-1, 1]$上单调增;

(2) $y=\arcsin x$ 是奇函数,即 $\arcsin(-x)=-\arcsin x, x\in[-1, 1]$.

证明 (1) 假设 $y=\arcsin x$ 在$[-1, 1]$上不单调增,即存在 x_1, $x_2\in[-1, 1]$,且 $x_1<x_2$,但 $\arcsin x_1\geqslant\arcsin x_2$.

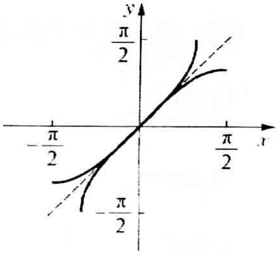
因为 $\arcsin x_1$, $\arcsin x_2\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 且 $y=\sin x$ 在

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上单调增，所以 $\sin(\arcsin x_1) \geqslant \sin(\arcsin x_2)$，即 $x_1 \geqslant x_2$，与 $x_1 < x_2$ 矛盾.

所以 $y=\arcsin x$ 在$[-1, 1]$上单调增.

(2) 当 $x \in [-1, 1]$时，$-x \in [-1, 1]$.

因为 $\arcsin(-x)$，$-\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，$y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上单调增，而



$$\sin[\arcsin(-x)]=-x,\ \sin(-\arcsin x)=-\sin(\arcsin x)=-x,$$

所以 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$，$x \in [-1, 1]$，即 $y=\arcsin x$ 是奇函数.

函数 $y=\arcsin x(x \in [-1, 1])$ 的图象与函数 $y=\sin x\left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

课堂活动 · 大家谈

$y=\arcsin x$ 是不是周期函数？为什么？

例 2 计算：

(1) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{\pi}\right)$；　　(2) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{3}\right)$.

解 (1) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{\pi}\right)=\frac{3}{\pi}$.

(2) 因为 $\frac{\pi}{3} \notin [-1, 1]$，所以 $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{3}\right)$没有意义.

例 3 用反正弦函数值的形式表示下列各式中的 x:

(1) $\sin x=\frac{3}{5}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

(2) $\sin x=\frac{3}{5}$, $x\in[0, \pi]$;

(3) $\sin x=-\frac{3}{5}$, $x\in[\pi, 2\pi]$.

解 (1) $x=\arcsin\frac{3}{5}$.

(2) $x=\arcsin\frac{3}{5}$ 或 $x=\pi-\arcsin\frac{3}{5}$.

(3) $x=\pi+\arcsin\frac{3}{5}$ 或 $x=2\pi-\arcsin\frac{3}{5}$.

下面研究三角函数与反三角函数的混合运算.

例 4 求 $\cos(\arcsin x)(x\in[-1, 1])$, $\tan(\arcsin x)(x\in(-1, 1))$.

解 设 $\alpha=\arcsin x$, $\sin\alpha=x$.

因为 $x\in[-1, 1]$, $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以

$$\cos(\arcsin x)=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}.$$

因为 $x\in(-1, 1)$, $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以

$$\tan(\arcsin x)=\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 5 求值:

(1) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$;

(2) $\cos\left[\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right]$;

(3) $\tan\left(\arcsin\frac{15}{17}\right)$;

(4) $\tan\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$.

解 (1) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$.

(2) $\cos\left[\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right]=\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$.

(3) $\tan\left(\arcsin\frac{15}{17}\right)=\dfrac{\frac{15}{17}}{\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}}=\frac{15}{8}$.

(4) $\tan\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]=\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 6 求值:

(1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$; (2) $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

解 (1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

(2) $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

研究以上结论,提出猜想,并证明猜想.

猜想:当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时,$\arcsin(\sin x)=x$.

证明 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时,$\arcsin(\sin x)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

因为 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调增,且 $\sin[\arcsin(\sin x)]=\sin x$,所以 $\arcsin(\sin x)=x$.

例 7 比较 $\arcsin(\sin\sqrt{2})$ 与 $\arcsin(\sin\sqrt{3})$ 的大小.

解 因为 $\arcsin(\sin\sqrt{2})=\sqrt{2}\approx1.414$,$\arcsin(\sin\sqrt{3})=\pi-\sqrt{3}\approx1.410$,所以 $\arcsin(\sin\sqrt{2})>\arcsin(\sin\sqrt{3})$.

例 8 研究函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 的性质.

解 函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为 $f(x+2\pi)=\arcsin[\sin(x+2\pi)]=\arcsin(\sin x)=f(x)$,所以 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 是周期为 2π 的周期函数.

因为 $f(-x)=\arcsin[\sin(-x)]=\arcsin(-\sin x)=-\arcsin(\sin x)=-f(x)$, 所以 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 是奇函数.

因为当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时,$\arcsin(\sin x)=x$, 所以 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 在 $\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$ 上单调增, 在 $\left[k\pi+\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$ 上单调减.

当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,$f(x)=\arcsin(\sin x)$ 取得最大值 $\frac{\pi}{2}$;

当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,$f(x)=\arcsin(\sin x)$ 取得最小值 $-\frac{\pi}{2}$.

课外活动

参考关于反正弦函数的研究,撰写“关于反余弦函数的研究报告”.

·自己学

定义 正切函数 $y=\tan x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数叫做**反正切函数**,记作 $y=\arctan x, x\in\mathbf{R}$.

理解: (1) $\arctan x$ 表示落在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内正切值为 x 的角;

(2) $\tan(\arctan x)=x$, $x\in\mathbf{R}$;

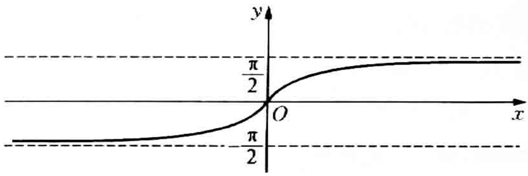
(3) $\arctan(\tan x)=x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

反正切函数的性质:

(1) $y=\arctan x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增;

(2) $y=\arctan x$ 是奇函数,即 $\arctan(-x)=-\arctan x$, $x\in\mathbf{R}$.

反正切函数的图象:



例 9 求值：

(1) $\sin\left(\arctan\dfrac{4}{3}\right)$； (2) $\tan\left[\arccos\left(-\dfrac{12}{13}\right)\right]$；

(3) $\cos\left(2\arctan\dfrac{3}{4}\right)$； (4) $\arcsin(\sin 6)$；

(5) $\arctan\dfrac{1}{7}+2\arctan\dfrac{1}{3}$； (6) $\arctan\left(\tan\dfrac{4\pi}{5}\right)$；

(7) $\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}$； (8) $\arcsin(\sin\sqrt{10})-\arccos(\cos\sqrt{10})$.

解 (1) $\sin\left(\arctan\dfrac{4}{3}\right)=\sin\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{4}{5}$.

(2) $\tan\left[\arccos\left(-\dfrac{12}{13}\right)\right]=\dfrac{\sin\left[\arccos\left(-\dfrac{12}{13}\right)\right]}{\cos\left[\arccos\left(-\dfrac{12}{13}\right)\right]}=\dfrac{\dfrac{5}{13}}{-\dfrac{12}{13}}=-\dfrac{5}{12}$.

(3) $\cos\left(2\arctan\dfrac{3}{4}\right)=\cos\left(2\arccos\dfrac{4}{5}\right)$

$=2\cos^2\left(\arccos\dfrac{4}{5}\right)-1=\dfrac{7}{25}$.

(4) $\arcsin(\sin 6)=\arcsin[\sin(6-2\pi)]=6-2\pi$.

(5) 设 $\alpha=\arctan\dfrac{1}{7}$，$\beta=2\arctan\dfrac{1}{3}$，则 $\tan\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\tan\beta=\dfrac{2\times\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{9}}=$

$\dfrac{3}{4}$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\dfrac{1}{7}+\dfrac{3}{4}}{1-\dfrac{1}{7}\times\dfrac{3}{4}}=1$.

又因为 $\alpha,\ \beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

(6) $\arctan\left(\tan\frac{4\pi}{5}\right)=\arctan\left[\tan\left(\frac{4\pi}{5}-\pi\right)\right]$

$$=\arctan\left[\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]=-\frac{\pi}{5}.$$

(7) 设 $\alpha=\arctan x,\beta=\arctan\frac{1}{x}$,则 $\tan\alpha\tan\beta=1$,所以角 $\alpha+\beta$ 的终边在 y 轴上.

当 $x>0$ 时,$\alpha,\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$;

当 $x<0$ 时,$\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right),\alpha+\beta=-\frac{\pi}{2}$.

所以 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2},\ x>0,\\ -\frac{\pi}{2},\ x<0.\end{cases}$

(8) $\arcsin(\sin\sqrt{10})-\arccos(\cos\sqrt{10})$

$=\arcsin[\sin(\pi-\sqrt{10})]-\arccos[\cos(2\pi-\sqrt{10})]$

$=\pi-\sqrt{10}-(2\pi-\sqrt{10})=-\pi.$

例 10 求下列函数的定义域和值域:

(1) $y=\arccos(\log_{\frac{1}{2}}x)$; (2) $y=\log_{\frac{1}{2}}(\arccos x)$;

(3) $y=\arccos(\arcsin x)$; (4) $y=\arcsin(\arccos x)$.

解 (1) 因为 $-1\leqslant\log_{\frac{1}{2}}x\leqslant1$,即 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$,所以 $D=\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$.

因为 $u=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$ 上单调减,$y=\arccos u$ 在 $[-1,\ 1]$ 上单调减,所以 $y=\arccos(\log_{\frac{1}{2}}x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$ 上单调增,且 $A=[0,\ \pi]$.

(2) 因为 $0<\arccos x\leqslant\pi$,即 $-1\leqslant x<1$,所以 $D=[-1,\ 1)$.

因为 $u=\arccos x$ 在 $[-1,\ 1)$ 上单调减,$y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 在 $(0,\ \pi]$ 上单调

减，所以 $y = \log_{\frac{1}{2}}(\arccos x)$ 在 $[-1, 1)$ 上单调增，且 $A = [\log_{\frac{1}{2}}\pi, +\infty)$.

(3) 因为 $-1 \leqslant \arcsin x \leqslant 1$，即 $-\sin 1 \leqslant x \leqslant \sin 1$ 所以 $D = [-\sin 1, \sin 1]$.

因为 $u = \arcsin x$ 在 $[-\sin 1, \sin 1]$ 上单调增，$y = \arccos u$ 在 $[-1, 1]$ 上单调减，所以 $y = \arccos(\arcsin x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调减，且 $A = [0, \pi]$.

(4) 因为 $0 \leqslant \arccos x \leqslant 1$，即 $\cos 1 \leqslant x \leqslant 1$，所以 $D = [\cos 1, 1]$.

因为 $u = \arccos x$ 在 $[\cos 1, 1]$ 上单调减，$y = \arcsin u$ 在 $[0, 1]$ 上单调增，所以 $y = \arcsin(\arccos x)$ 在 $[\cos 1, 1]$ 上单调减，且 $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

例 11 用反正弦表示 $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{15}{17}$.

解 设 $\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$，$\beta = \arcsin\frac{15}{17}$，则 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$，$\sin\beta = \frac{15}{17}$，得 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$，$\cos\beta = \frac{8}{17}$.

因为
$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{5}\times\frac{8}{17} + \frac{4}{5}\times\frac{15}{17} = \frac{84}{85},$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}\times\frac{8}{17} - \frac{3}{5}\times\frac{15}{17} = -\frac{13}{85},$$
所以
$$\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{15}{17} = \pi - \arcsin\frac{84}{85}.$$

例 12 比较 $\arcsin a$ 与 $\arcsin a^2$ $(|a| \leqslant 1)$ 的大小.

解 当 $a = 0$ 或 $a = 1$ 时，$a = a^2$，得 $\arcsin a = \arcsin a^2$；

当 $a \in [-1, 0)$ 时，$a < a^2$，得 $\arcsin a < \arcsin a^2$；

当 $a \in (0, 1)$ 时，$a > a^2$，得 $\arcsin a > \arcsin a^2$.

例 13 当 $x \in [-1, 1]$ 时，比较 $\arcsin x$ 与 $\arccos x$ 的大小.

解 因为 $y = \arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上单调增，$y = \arccos x$ 在 $[-1, 1]$ 上单调减，所以，当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\arcsin x = \arccos x = \frac{\pi}{4}$；

当 $x \in \left[-1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$\arcsin x < \arccos x$；

当 $x \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ 时，$\arcsin x > \arccos x$.

例 14 已知 $\arcsin(\sin\alpha + \sin\beta) + \arcsin(\sin\alpha - \sin\beta) = \dfrac{\pi}{2}$，求 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta$ 的值.

解 由于 $\arcsin(\sin\alpha + \sin\beta) + \arcsin(\sin\alpha - \sin\beta) = \dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\arcsin(\sin\alpha + \sin\beta)$ 与 $\arcsin(\sin\alpha - \sin\beta)$ 互余，

则 $$\sin[\arcsin(\sin\alpha + \sin\beta)] = \cos[\arcsin(\sin\alpha - \sin\beta)],$$

所以 $$\sin\alpha + \sin\beta = \sqrt{1 - (\sin\alpha - \sin\beta)^2},$$

化简，得 $$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \frac{1}{2}.$$

习题练习

· 自己练

1. 求值：

(1) $\sin\left(\arcsin\left(-\dfrac{1}{\pi}\right)\right)$； (2) $\cos\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$；

(3) $\tan\left(\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

2. 求下列函数的反函数：

(1) $y = \sin x \left(x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]\right)$；

(2) $y = \sqrt{\sin x} \left(x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$；

(3) $y = \lg(\sin x) \left(x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$；

(4) $y = \lg(\arcsin x)(x \in (0, 1])$.

3. 求函数 $y = \arcsin(x^2 - x + 1)$ 的定义域、值域和单调区间.

4. 求值：

(1) $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$; (2) $\arctan(-\sqrt{3})$;

(3) $\arctan\left(2\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; (4) $\arctan\left(2\cos\frac{5\pi}{3}\right)$.

5. 用反正切函数值的形式表示下列各式中的 x:

(1) $\tan x=\frac{4}{3}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

(2) $\tan x=\frac{12}{5}$, $x\in\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$;

(3) $\tan x=-\frac{24}{7}$, $x\in(-2\pi, 0)$.

6. 求下列函数的定义域:

(1) $y=2\arctan 2x$; (2) $y=\sqrt{\arctan x}$;

(3) $y=\lg(\arctan x)$.

7. 求值:

(1) $\sin[\arctan(-1)]$; (2) $\cos\left(\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(3) $\tan\left[\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\arctan\sqrt{3}\right]$;

(4) $\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3$.

8. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\tan x\left(x\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right)$; (2) $y=\sqrt{\tan x}\left(x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

(3) $y=\lg(\tan x)\left(x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$;

(4) $y=\lg(\arctan x)(x\in(0, +\infty))$.

9. 求下列函数的定义域和值域:

(1) $y=\arcsin\sqrt{x+1}$; (2) $y=\sqrt{\arcsin x+1}$.

10. 求函数 $y=\arctan(x^2-1)$ 的定义域、值域和单调区间.

11. 求函数 $y=\sin x+\arcsin x$ 的值域.

12. 用反余弦表示 $\arccos\frac{3}{4}-\arcsin\frac{4}{5}$.

13. 求值: $\arcsin(\sin 2)+\arccos(\cos 4)$.

14. 证明: $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, x\in[-1, 1]$.

6.4 反三角函数

1. (1) $-\frac{1}{\pi}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$ **2.** (1) $y=\pi-\arcsin x(x\in[-1, 1])$ (2) $y=\arcsin x^2(x\in[0, 1])$ (3) $y=\arcsin 10^x(x\in(-\infty, 0])$ (4) $y=\sin 10^x\left(x\in\left(-\infty, \lg\frac{\pi}{2}\right]\right)$ **3.** 定义域是$[0, 1]$,值域是$\left[\arcsin\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$,单调递增区间是$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$,单调递减区间是$\left[0, \frac{1}{2}\right]$ **4.** (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $-\frac{\pi}{3}$ (3) $-\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{4}$ **5.** (1) $x=\arctan\frac{4}{3}$ (2) $x=\pi+\arctan\frac{12}{5}$ (3) $x=-\arctan\frac{24}{7}$ 或 $x=-\pi-\arctan\frac{24}{7}$ **6.** (1) $\mathbf{R}$ (2) $[0, +\infty)$ (3) $\mathbf{R}^+$ **7.** (1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) π **8.** (1) $y=\pi+\arctan x\ (x\in\mathbf{R})$ (2) $y=\arctan x^2\ (x\in[0, +\infty))$ (3) $y=\arctan 10^x\ (x\in\mathbf{R})$ (4) $y=\tan 10^x\ \left(x\in\left(-\infty, \lg\frac{\pi}{2}\right)\right)$ **9.** (1) 定义域是$[-1, 0]$,值域是$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (2) 定义域是$[-\sin 1, 1]$,值域是$\left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}+1}\right]$ **10.** 定义域是 $\mathbf{R}$,值域是$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$,单调递增区间是$[0, +\infty)$,单调递减区间是$(-\infty, 0]$

11. $\left[-\sin 1-\frac{\pi}{2}, \sin 1+\frac{\pi}{2}\right]$ **12.** $-\arccos\frac{9+4\sqrt{7}}{20}$ **13.** $3\pi-6$

14. 略