1996年修订本

高等数学习题集

同济大学应用数学系

高等教育出版社

高等学校教学参考书

高等数学习题集

（1996 年修订本）

同济大学应用数学系 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书内容分为：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和微分方程等十二章的习题及习题答案与提示，另附 8 个附录．

本习题集共计题目 2416 个（小题不计），其中 1965 年修订本的习题约占 30%，70%的习题是新编写的，与同济大学数学教研室主编的《高等数学》第四版教材相配合，顺序也基本一致。题目分为 A、B、C 三个层次，分别约占 43%、47%、10%，适用于不同专业的不同要求．

前　　言

同济大学数学教研室编写的《高等数学习题集》第一、二版相继于1959年、1965年由高等教育出版社出版以来，它作为一本高校工科高等数学的辅助教材，在我国工科高等数学教学中起到了一定的作用．几十年来，随着我国高等教育事业的发展，高等数学的教学内容和要求发生了不少变化，工科高等数学教材也已多次更新，为了能与这一情形相适应，对这本习题集进行修订已显得十分必要了．在教学中我们也积累了一批好的习题，为修订习题集准备了良好的题源条件．

这个修订本是参照国家教委审订的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，基本上按照同济大学数学教研室主编的《高等数学》第四版的章节顺序编写的，可以与该教材配合使用．其中各节的习题分成（A）、（B）、（C）三个层次：（A）类题（约占43%）为基本题；（B）类题（约占47%）具有一定的难度，这两类题都符合教学基本要求，适合于高校学习工科高等数学的大多数专业；（C）类题（约占10%）是较难的，有的已超出教学基本要求，适合于对高等数学课程具有较高要求的专业．凡《高等数学》第四版中标有“*”号的内容，本书中相应的习题也标有“*”号（有的在节的标题前标出了“*”号，该节的每个习题就不再标明“*”号）．在这个修订本中，原习题集的习题约占30%，70%左右的习题是新编的，它们与《高等数学》第四版中的习题基本上不重复．我们希望这个修订本能更好地适合当前工科高等数学教学的需要．

这个修订本仍由西安交通大学陆庆乐教授审稿，他认真审阅了原稿，并提出了不少改进意见，对此我们表示衷心感谢．

由于编者水平所限，书中难免会有不妥之处，我们诚挚地欢迎同行们及广大使用者批评指正.

编　　者

1996年8月

目　　录

第一章　函数与极限

一、函　　数

(A)

1.1.1. 设函数 $\varphi(t)=t^3+1$，求 $\varphi(t^2)$，$[\varphi(t)]^2$.

1.1.2. 设函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，求 $f(x+\Delta x)-f(x)$.

1.1.3. 若函数 $\psi(x)=\ln x$，证明：

$$\psi(x)+\psi(x+1)=\psi[x(x+1)].$$

1.1.4. 若函数 $F(z)=a^z$ $(a>0,a\neq1)$，证明：

(1) $F(-z)\cdot F(z)-1=0$；　(2) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$.

1.1.5. 若函数 $\varphi(\theta)=\tan\theta$，证明：

$$\varphi(a+b)=\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1-\varphi(a)\varphi(b)}.$$

1.1.6. 设函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0;\\ 2, & 0\leqslant x<1;\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

求 $\varphi(3)$，$\varphi(2)$，$\varphi(0)$，$\varphi(0.5)$，$\varphi(-0.5)$.

1.1.7. 已知函数 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{x^2+1}$ $(x>0)$，求 $f(x)$.

1.1.8. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$；　　(2) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$; (4) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;

(5) $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x<0;\\ x, & 0<x<1;\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

1.1.9. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$, $g(x)=\frac{1}{1+x}$;

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$;

(3) $f(x)=\sqrt{(1-x^2)^2}$, $g(x)=1-x^2$;

(4) $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$, $g(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$;

(5) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x^4}$.

1.1.10. 画出下列各函数的图形：

(1) $y=x^2+cx+1$，当 $c=-2, c=0, c=2$ 时；

(2) $y=|x^2-1|$.

1.1.11. 已知函数 $f(x)$ 以 2 为周期，且在 $(-1,1]$ 上

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1<x<0;\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

试画出函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形.

1.1.12. 证明函数 $f(x)=x^3+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

1.1.13. 指出下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数：

(1) $y=x^4-2x^2$; (2) $y=x-x^2$;

(3) $y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$; (4) $y=\mathrm{sgn}\ x$.

1.1.14. 设 $f(x)$ 是偶函数，指出下列函数的奇偶性：

(1) $xf(x)$; (2) $(x^2+1)f(x)$;

(3) $x^3+f(x)$； (4) $x^4-f(x)$.

1.1.15. 设函数 $f(x)=x-[x]$.

(1) 试问 $f(x)$是否为周期函数？(2) 作出函数 $y=f(x)$的图形.

1.1.16. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$； (2) $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ $(|x|\geqslant 1)$.

(B)

1.1.17. 用数学归纳法证明下列等式或不等式(其中 $n\in N_+$)①：

(1) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；

(2) $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$；

(3) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

1.1.18. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是符号相同且大于 -1 的数. 证明伯努利(Bernoulli)不等式：

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

1.1.19. 设 $n\in N$ 且 $n>1$, $x>-1$. 证明：

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,$$

当且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

1.1.20. 证明：函数 $y=\frac{x^2+1}{x^4+1}$在它的定义域内有界.

1.1.21. 设函数 $f(x)$的定义域为 D，而集合 $A\subset D$, $B\subset D$. 证明：

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$； (2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap$

---

① 国家标准规定，自然数集N＝{0, 1, 2, 3, …}. 除 0 的自然数集，上标星号 N^* 或下标＋号N_+.

$f(B)$，其中 $f(A)$表示集合$\{f(x)|x\in A\}$，$f(B)$表示集合$\{f(x)|x\in B\}$.

1.1.22. 设函数 $f(x)=x+1$，函数 $g(x)=x-2$，试解方程：

$$|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|.$$

1.1.23. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且对任意实数 x、y，有 $f(x)\neq 0$，$f(xy)=f(x)\cdot f(y)$. 求 $f(1996)$.

1.1.24. 设函数 $z=x+y+f(x-y)$，当 $y=0$ 时，$z=x^2$. 求 $f(x)$及 z.

1.1.25. 设函数 $f(x)$的定义域和值域均为$[0,+\infty)$. 令 $f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$ $(n=1,2,\cdots)$. 已知 $f_{n+1}(x)=[f_n(x)]^2$ $(n=1,2,\cdots)$，求 $f(x)$及 $f_n(x)$.

1.1.26. 若函数 $f(x)$对于其定义域内的一切 x 恒有 $f(x)=f(2a-x)$，则称函数 $f(x)$对称于 $x=a$. 证明：如果函数 $f(x)$对称于 $x=a$ 及 $x=b$ $(b>a)$，则 $f(x)$必定是周期函数.

(C)

1.1.27. 设 a_k、$b_k(k=1,2,\cdots,n)$均为实数. 证明：

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

1.1.28. 设 $a_k>0$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 证明：

(1) $\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$;

(2) $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$.

1.1.29. 设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内有定义，$a>0$，$b>0$. 证明：

(1) 若$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调减少，则

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b);$$

(2) 若$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调增加，则

$$f(a+b)\geqslant f(a)+f(b).$$

1.1.30. 设$a>0,b>0$，利用上一题结论证明：

(1) 当$0<p<1$时，有$(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$；

(2) 当$p>1$时，有$(a+b)^p\geqslant a^p+b^p$.

1.1.31. 证明：$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在$(-\infty,-1)$及$(-1,+\infty)$内均为单调增加函数．并由此证明对任意实数a、b，有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

1.1.32. 设函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且满足

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x},$$

其中a、b、c均为常数，$|a|\neq|b|$．证明$f(x)$为奇函数．

二、初 等 函 数

(A)

1.2.1. 求下列各函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$；　　(2) $y=\log_2(\log_2 x)$；

(3) $y=\sqrt{16-x^2}+\sqrt{\sin x}$；　　(4) $y=\cot\sqrt{x}$[①]；

(5) $y=\arcsin(3^x+2)$；　　(6) $y=\ln(\sin x)$.

1.2.2. 验证下列各函数在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的：

(1) $y=2^{x-1}$；　　(2) $y=x+\ln x$.

1.2.3. 指出下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些

---

① 正切函数符号为 tan，余切函数符号为 cot.

是非奇非偶函数(其中 $a>1$)：

(1) $y=2^x$； (2) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$；

(3) $y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$； (4) $y=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$.

1.2.4. 下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数指出其周期：

(1) $y=\sin(x^2)$； (2) $y=\sin\frac{1}{x}$；

(3) $y=\cos(x-2)$； (4) $y=\arctan(\tan x)$.

1.2.5. 求下列各个周期函数的周期：

(1) $\cos^2x$； (2) $\cos^4x+\sin^4x$；

(3) $1+5\tan\frac{x}{5}+3\cos\frac{x}{3}$.

1.2.6. 设函数 $y=f(x)$的定义域为$[-1,0]$,求下列函数的定义域：

(1) $f(x^3)$； (2) $f(\sin 2x)$；

(3) $f(ax)\quad(a>0)$； (4) $f(x+a)+f(x-a)\quad(a>0)$.

1.2.7. 对于下列各对函数 $f(x)$与 $g(x)$，求复合函数 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$，并确定它们的定义域：

(1) $f(x)=x+1$， $g(x)=2x$；

(2) $f(x)=\sqrt{x+1}$， $g(x)=x^4$；

(3) $f(x)=\frac{x}{x+2}$， $g(x)=\frac{x-1}{x}$；

(4) $f(x)=|x|$， $g(x)=-x$；

(5) $f(x)=\sqrt{1-x}$， $g(x)=\sqrt{x-1}$；

(6) $f(x)=\frac{|x|}{x}$， $g(x)=x^2$；

(7) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$， $g(x)=\sqrt[4]{x-1}$.

1.2.8. 对下列函数 $f(x)$,求函数 $g(x)$,使得

$$f[g(x)]=g[f(x)]=x：$$

(1) $f(x)=-3x+2$； (2) $f(x)=ax+b\quad(a\neq0)$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

1.2.9. 求下列各函数的反函数：

(1) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$；　　(2) $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$；

(3) $y=3^{2x+5}$.

1.2.10. 求下列各函数的反函数 $y=\varphi(x)$，并画出函数与反函数的图形：

(1) $y=2^x+1$；　　(2) $y=1+\log_4 x$；

(3) $y=\sin(x-1)$，$\frac{\pi}{2}+1\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}+1$；

(4) $y=x^2-2x$，$x\leqslant 0$；　　(5) $y=\arcsin\frac{1-x}{4}$.

1.2.11. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形：

(1) $y=\sin 2x$；　　(2) $y=\sin\left(2x+\frac{3}{2}\right)$；

(3) $y=\frac{1}{2}\sin x$；　　(4) $y=\frac{1}{2}\sin(x)-1$.

1.2.12. 在半径为 r 的球内嵌入一内接圆柱，试将圆柱的体积表为其高的函数，并求此函数的定义域.

1.2.13. 一物体受压缩弹簧的推力而沿直线方向运动. 如这弹簧的一端固定于原点，原长 $2l$，压缩后长度为 $1.5l$，弹性系数为 k. 试将物体所受之力的大小表为物体离原点的距离的函数(只考虑弹簧长度由 $1.5l$ 变到 $2l$ 的过程).

1.2.14. 把一半径为 R 的圆形铁片，自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为 α 的函数.

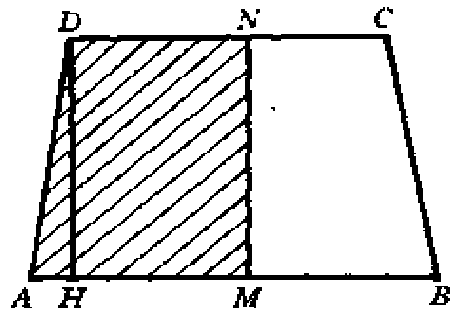


图 1-1

1.2.15. 一等腰梯形 $ABCD$ (如图 1-1)，其两底分别为 $AB=a$，$DC=b$ $(a>b)$，高为 $HD=h$. 引直线段 $MN/\!/HD$，MN 与顶点 A 的距离 $AM=x$ $(0\leqslant x\leqslant a)$. 试

将梯形位于直线段 MN 之左的面积 S 表为 x 的函数.

1.2.16. 一长为 l 的弦，两端固定，在 $C(c,0)$ 点处将弦提高 h 后呈图 1-2 中的形状. 设提高时弦上各点仅沿着垂直于两端点连结线方向移动. 以 x 表示弦未提高时弦上点的位置，y 表示点 x 处升高的高度，试建立 x 与 y 间的函数关系.

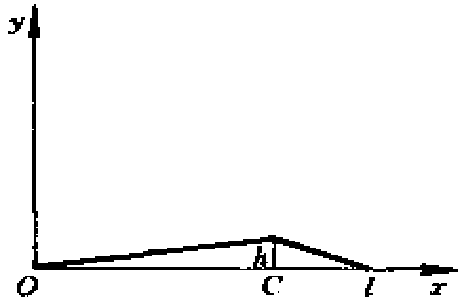


图 1-2

1.2.17. 在区间 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上有质量为 3 g 的物质均匀分布着，此外又有质量为 1 g 的物质集中在 $x=3$ 处. 设 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内变化，试将位于区间 $(-\infty, x]$ 上的物质的质量 M 表为 x 的函数.

(B)

1.2.18. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$f_n(x)=\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n\text{个}f}(x),$$

求 $f_n(x)$.

1.2.19. 设函数 $f(x)=\sqrt{x}$ $(0\leqslant x<1)$.

(1) 将函数 $f(x)$ 延拓到 $(-1,1)$，使其成为偶函数，即找一个偶函数 $F(x)$ $(-1<x<1)$，使得当 $x\in[0,1)$ 时，$F(x)=f(x)$；

(2) 将函数 $f(x)$ 延拓到 $(-\infty,+\infty)$，使其成为周期为 1 的周期函数.

1.2.20. 设函数 $f(x)=e^x-1$ $(x\geqslant 0)$. 将函数 $f(x)$ 延拓到 $(-\infty,+\infty)$，使其分别成为(1) 奇函数；(2) 偶函数.

1.2.21. 将函数 $f(x)=x^2(0\leqslant x<1)$ 延拓到 $(-\infty,+\infty)$，使其成为周期为 1 的周期函数.

1.2.22. 设函数 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\arcsin x$. 试分别讨论函数 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$的定义域、奇偶性、周期性，并作出它们的图形.

1.2.23. 验证下列关系式：

(1) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$;

(2) $\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x=\mathrm{ch}\,2x$;

(3) $2\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{ch}\,x=\mathrm{sh}\,2x$;

(4) $\mathrm{sh}(\alpha\pm\beta)=\mathrm{sh}\,\alpha\cdot\mathrm{ch}\,\beta\pm\mathrm{ch}\,\alpha\cdot\mathrm{sh}\,\beta$;

(5) $\mathrm{ch}(\alpha\pm\beta)=\mathrm{ch}\,\alpha\cdot\mathrm{ch}\,\beta\pm\mathrm{sh}\,\alpha\cdot\mathrm{sh}\,\beta$;

(6) $1-\mathrm{th}^2x=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$;　　(7) $1-\mathrm{coth}^2x$①$=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}$;

(8) $\mathrm{sh}\,x+\mathrm{ch}\,x=\mathrm{e}^x$;　　(9) $\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x=\mathrm{e}^{-x}$.

1.2.24. 对下列各对函数 $f(x)$和 $g(x)$，求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$：

(1) $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$　　$g(x)=\begin{cases}5x, & x<0,\\ -3x, & x\geqslant 0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0,\end{cases}$　　$g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, & x>0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$　　$g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0;\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$　　$g(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

1.2.25. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加，且对一切 x 有 $f(x)\leqslant g(x)$. 证明：

$$f[f(x)]\leqslant g[g(x)].$$

(C)

1.2.26. 如图 1-3，在$\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，

① 双曲余切函数符号为 coth.

$\angle ACB=120°$. 现将$\triangle ABC$分别以BC、AC、AB所在的直线为轴旋转一周，设所得的三个旋转体的体积依次为V_1、V_2、V_3.

(1) 求$T=\frac{V_3}{V_1+V_2}$（用a、b、c表示）；

(2) 令$\frac{a+b}{c}=x$，将T表为x的函数，写出这函数的定义域，并求这函数的最大值.

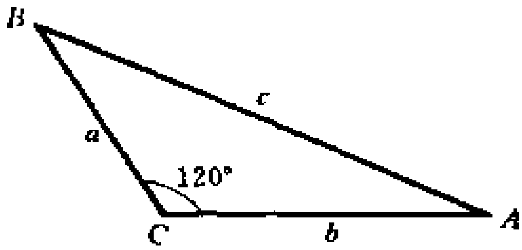


图 1-3

三、数列的极限

(A)

1.3.1. 设$x_n=\frac{n}{3n-1}(n=1,2,\cdots)$. 根据数列极限的定义，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{3}$，并填下表：

$\left\lvert x_n-\frac{1}{3}\right\rvert<$	0.1	0.02	0.003	$\varepsilon(>0)$
$n>$				

1.3.2. 证明数列$u_n=\frac{4n^2+1}{3n^2+2}$当$n\to\infty$时趋于$\frac{4}{3}$. 问$n$从何值开始，才能使$\left\lvert\frac{4}{3}-u_n\right\rvert$小于给定的正数$\varepsilon$?

在题1.3.3～1.3.5中，根据定义证明各极限：

1.3.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.

1.3.4. $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1\quad(a>1)$.

1.3.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+5}{n^2+n-1}=1$.

1.3.6. 判定下列各数列的收敛性，并加以证明：

(1) $\left\{(-1)^n \frac{n+1}{n}\right\}$；　　(2) $\left\{\sin \frac{n\pi}{2}\right\}$；

(3) $\{a^n\}$　$(a>1)$；　　(4) $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$.

(B)

1.3.7. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，根据定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a.$$

1.3.8. 根据定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，并利用上题结论求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}.$$

(C)

1.3.9. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\neq0$. 根据定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$.

1.3.10. 设数列$\{x_n\}$满足$|x_{n+1}|\leqslant q|x_n|$　$(n=1,2,\cdots)$，其中 $0<q<1$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

四、函数的极限

(A)

根据定义，证明题 1.4.1～1.4.3 中的各极限：

1.4.1. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=4$.

1.4.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-x}{x^2+10}=3$.

1.4.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)=-2$.

1.4.4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in(-\pi,0),\\ x\cos\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1).\end{cases}$ 证明

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0.$$

1.4.5. 设函数 $f(x)=\dfrac{3x+|x|}{5x-3|x|}$. 求:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to+0}f(x)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to-0}f(x)$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

1.4.6. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,根据定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$,并举例说明反之未必成立.

(B)

1.4.7. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,证明:存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)|\leqslant M$.

1.4.8. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,且 $A>B$,证明:存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)>g(x)$.

1.4.9. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,且当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$. 证明 $A\geqslant B$.

五、无穷小与无穷大

(A)

1.5.1. 在下列各题中,指出哪些是无穷小,哪些是无穷大:

(1) $\dfrac{1+2x}{x^2}$ 当 $x\to 0$ 时;　　(2) $\dfrac{x+1}{x^2-9}$ 当 $x\to 3$ 时;

(3) $2^{-x}-1$ 当 $x\to 0$ 时;　　(4) $\lg x$ 当 $x\to+0$ 时;

(5) $\dfrac{\sin\theta}{1+\sec\theta}$ 当 $\theta\to 0$ 时.

1.5.2. 下列函数当 $x\to\infty$时均具有极限，试把各函数表为一常数（极限）与当 $x\to\infty$时的无穷小之和的形式：

(1) $y=\dfrac{x^3}{x^3-1}$； (2) $y=\dfrac{x^2}{2x^2+1}$；

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

1.5.3. 根据定义证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x^2}=\infty$.

1.5.4. 设函数 $f(x)\neq 0$. 根据定义证明：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

(B)

1.5.5. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{x-1}, & 1<x\leqslant 4.\end{cases}$$

证明：函数 $f(x)$在点 $x_0=1$ 的任何邻域内都是无界的，但函数 $f(x)$不是当 $x\to 1$ 时的无穷大.

(C)

1.5.6. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. 根据定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty.$$

六、极限运算法则

(A)

求题 1.6.1～1.6.16 中的各极限：

1.6.1. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

1.6.2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{1-x}$.

1.6.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$.

1.6.4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

1.6.5. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$.

1.6.6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$ $(n\in\mathbb{N}_+)$.

1.6.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

1.6.8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x-5}{x+7}$.

1.6.9. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

1.6.10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

1.6.11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

1.6.12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

1.6.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

1.6.14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\cos x}{2x-\cos x}$.

1.6.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$.

1.6.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

(B)

求题 1.6.17～1.6.20 中的各极限：

1.6.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$.

1.6.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

1.6.19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}$.

1.6.20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

1.6.21. 证明：当 $x\to 0$ 时，$y=\cos\frac{2\pi}{x}$ 的左、右极限均不存在.

1.6.22. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & -\infty<x<0, \\ \sin\frac{1}{x}, & 0<x<+\infty. \end{cases}$$

求 $\lim\limits_{x\to-0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)$.

1.6.23. 已知

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2,$$

求常数 a 和 b.

1.6.24. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{ax^2+bx+1}\right)=1$，求常数 a 和 b.

1.6.25. 已知

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}-ax-b\right)=0,$$

求常数 a 和 b.

1.6.26. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$ ($|x|<1$).

1.6.27. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}$.

1.6.28. 设有数列 $\{u_n\}$ 和数列 $\{v_n\}$，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lambda\neq0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

(C)

1.6.29. 设 $a_1=1$，$a_2=4$，且 $a_{n+1}=\dfrac{a_{n-1}+a_n}{2}$ $(n=2, 3, \cdots)$. 求：

(1) $b_n=a_n-a_{n-1}$ 的表达式；　　(2) $\sum\limits_{k=2}^{n}b_k$ 的表达式；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

1.6.30. 设 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+2}=\dfrac{2a_na_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}$ $(n=1, 2, \cdots)$. 求：

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}$ 的表达式；　　(2) $\sum\limits_{k=2}^{n}b_k$ 的表达式；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

七、极限存在准则　两个重要极限

(A)

求题 1.7.1～1.7.8 中的各极限：

1.7.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$ $(\beta\neq0)$.

1.7.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

1.7.3. $\lim\limits_{\alpha\to+0}\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$.

1.7.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2\dfrac{x}{3}}$.

1.7.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

1.7.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$.

1.7.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$.

1.7.8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$.

1.7.9. 设 $x_n=\dfrac{5\cdot 6\cdot\cdots\cdot(n+4)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

(B)

利用夹逼准则，求题 1.7.10～1.7.13 中的各极限：

1.7.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$.

1.7.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

1.7.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{1+\dfrac{a}{n}}-1\right)$ $(a>0)$.

1.7.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}$ $(a\geqslant 0)$.

应用柯西审敛原理，讨论题 1.7.14～1.7.15 中的各数列的收敛性：

*1.7.14. $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{q^k}{k}$ $(n=1,2,\cdots)$，其中 $|q|<1$.

*1.7.15. $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+2^k}$ $(n=1,2,\cdots)$.

求题 1.7.16～1.7.23 中的各极限：

1.7.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$.

1.7.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}$.

1.7.18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\tan 3x\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$.

1.7.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2\cdot\cos\dfrac{1}{x}}{x}$.

1.7.20. $\lim\limits_{v\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos v}{\sin\left(v-\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

1.7.21. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

1.7.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+a)-\sin(a-x)}{x}$.

1.7.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

1.7.24. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\varphi}{2}\cdot\cos\dfrac{\varphi}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\varphi}{2^n}$.

1.7.25. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sec\dfrac{\varphi}{2}\cdot\sec\dfrac{\varphi}{2^2}\cdot\cdots\cdot\sec\dfrac{\varphi}{2^n}$ $(-\pi<\varphi<\pi)$.

1.7.26. 设 $a_k\geqslant 0$ $(k=1,2,\cdots,r)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_r^n}$.

1.7.27. 利用夹逼准则证明$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

1.7.28. 利用夹逼准则，证明：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{a^x}=0$ $(a>1)$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$ $(a>1,k\in\mathbb{N})$.

1.7.29. 设$\{x_n\}$为单调数列，证明：数列$\{x_n\}$收敛于 a 的充分必要条件是存在子数列$\{x_{n_k}\}$，使得$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

1.7.30. 设数列$\{x_n\}$满足：$0<x_n<1$，$x_{n+1}^2=-x_n^2+2x_n$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限.

(C)

1.7.31. 设 $x_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lambda<1$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

1.7.32. 设 $A>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{A}{x_n}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明数列$\{x_n\}$单调减少且有下界；

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.7.33. 设数列$\{x_n\}$具有以下性质：

$$1\leqslant x_0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots,$$

数列$\{y_n\}$由下式定义：

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)\frac{1}{\sqrt{x_k}}\ (n=1,2,\cdots).$$

证明$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在.

*1.7.34. 设数列$\{x_n\}$满足$|x_{n+1}-x_n|\leqslant q^n$ $(n=1,2,\cdots)$，其中$0<q<1$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

1.7.35. 设 $a>b>0$，$a_1=\frac{a+b}{2}$，$b_1=\sqrt{ab}$，…，$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$，$b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$，…. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 均存在且相等.

1.7.36. 设 $x_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$（$a$ 为有限数或无穷大）. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$.

八、无穷小的比较

(A)

1.8.1. 当 $x\to1$ 时，两无穷小$\frac{1-x}{1+x}$和 $1-\sqrt{x}$ 中哪一个是高阶的？

1.8.2. 当 $x\to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 和下列无穷小是否同阶？是否等价？

(1) $1-\sqrt[3]{x}$；　　　　(2) $2(1-\sqrt{x})$.

1.8.3. 证明：$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}\ (x\to+0)$.

1.8.4. 证明下列等式：

(1) $x+x^2\sin\dfrac{1}{x}=x+o(x)\ (x\to 0)$；

(2) $(1+x)^n=1+nx+o(x)\ (x\to 0)$，其中 $n\in\mathrm{N}$；

(3) $\sqrt[n]{1+x}=1+\dfrac{1}{n}x+o(x)\ (x\to 0)$，其中 $n\in\mathrm{N}_+$.

1.8.5. 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^3\dfrac{1}{n}\cdot\arctan\dfrac{3}{n\sqrt{n}}}{\sin\dfrac{2}{n^3}\cdot\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\arcsin\dfrac{5}{n}}.$$

1.8.6. 设圆心角 $\angle AOB=\alpha$，它所对应的圆弧为 $\overset{\frown}{AB}$，弦为 AB，半径 $OD\perp AB$，并与 AB 交于 C. 证明：

(1) 当 $\alpha\to 0$ 时，AB 与 $\overset{\frown}{AB}$ 是等价无穷小；

(2) 当 $\alpha\to 0$ 时，CD 是比 $\overset{\frown}{AB}$ 高阶的无穷小 .

(B)

1.8.7. 分别确定使下列各式成立的 α：

(1) $\sqrt[3]{x}\sin^2 x\sim x^\alpha\ (x\to 0)$；

(2) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\sim\dfrac{1}{4}x^\alpha\ (x\to 0)$；

(3) $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)\sim x^\alpha\ (x\to\infty)$.

1.8.8. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 均为当 $x\to x_0$ 时的无穷小，$|h(x)|\leqslant M$. 证明：

(1) $o(f(x))+o(f(x))=o(f(x))\quad(x\to x_0)$；

(2) $o(f(x))\cdot o(g(x))=o(f(x)g(x))\ (x\to x_0)$；

(3) $h(x)\cdot o(f(x))=o(f(x))\ (x\to x_0)$.

1.8.9. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$.

(C)

1.8.10. 设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1995}}{n^{\alpha}-(n-1)^{\alpha}}=\lambda\neq 0,$$

求 α 及 λ.

九、函数的连续性与间断点

(A)

1.9.1. 指出下列函数在 $x=0$ 处是否连续？若不连续，指出间断点的类型：

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|\sin x|}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}e^x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0;\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}+1, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ 1+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0;\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.9.2. 求下列函数的间断点，并说明这些间断点是属于哪一类，如果是可去间断点，则补充函数的定义使补充定义后的函数连续：

(1) $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$； (2) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$；

(3) $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$； (4) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-1}$；

(5) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1.9.3. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\leqslant 0;\\ \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}, & 0<x<\pi\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

(B)

1.9.4. 设函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$$

在$(-\infty,+\infty)$内连续. 试确定常数 a 和 b.

1.9.5. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0;\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x+1, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

试讨论 $f(x)+g(x)$的连续性.

1.9.6. 指出下列函数的间断点，并说明间断点的类型：

(1) $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]\ (x>0)$； (2) $f(x)=\mathrm{sgn}(\sin x)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}, & x\neq 0,\ x\neq\pm 1,\\ 0, & x=0,\ x=\pm 1.\end{cases}$

1.9.7. 函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ 当 $x=0$ 时没有定义，能否在

点 $x=0$ 处补充 $f(x)$的定义，使补充定义后的函数在这点变成连续？为什么？

1.9.8. $x=0$ 是函数

$$y=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$$

的哪一类间断点？是否为可去间断点？

1.9.9. 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 的某邻域内有定义，且$|f(x)|\leqslant|x|$. 证明 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

1.9.10. 设函数 $f(x)$在 $x=a$ 处连续且 $f(a)>0$. 证明：存在 $\delta>0$，使得当$|x-a|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$.

1.9.11. 设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内连续，且满足条件：$f(x^2)=f(x)$ $(x>0)$. 证明 $f(x)$在$(0,+\infty)$内恒为常数.

1.9.12. 设函数 $f(x)$在其定义区间内连续，且在有理点处为零. 证明：$f(x)$在其定义区间内恒为零.

1.9.13. 证明：单调有界函数的一切不连续点均为第一类间断点.

1.9.14. 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$，$x\in[a,b]$. 试按连续函数的"ε-δ"定义证明：$\dfrac{1}{f(x)}$在闭区间$[a,b]$上也连续.

1.9.15. 设函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}; \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

其中$\mathbb{Q}$为有理数全体，$\mathbb{R}$为实数全体，$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\{x\mid x\in\mathbb{R}$ 且 $x\notin\mathbb{Q}\}$. 证明：$D(x)$在$(-\infty,+\infty)$内处处都不连续.

1.9.16. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且在 $x=0$ 处连续，对任意的 x_1 和 x_2 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$. 证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

1.9.17. 试分别举出具有以下性质的函数 $f(x)$的例子：

(1) $x=0,\pm 1,\pm 2,\pm\frac{1}{2},\cdots,\pm n,\pm\frac{1}{n},\cdots$是$f(x)$的所有间断点，且它们都是无穷间断点；

(2) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内处处不连续，但$|f(x)|$在$(-\infty,+\infty)$内处处连续；

(3) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内处处有定义，但仅在一点连续．

十、连续函数的运算与初等函数的连续性

(A)

1.10.1. 求下列各函数的连续区间，并求极限：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$；

(2) $f(x)=\lg(2-x)$, $\lim\limits_{x\to -8}f(x)$；

(3) $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$, $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$；

(4) $f(x)=\ln\arcsin x$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)$.

求题 1.10.2～1.10.4 中的各极限：

1.10.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\cdots\sqrt{3}}}}}_{n\text{个}\sqrt{\ }}$.

1.10.3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{8\cos^2 x-2\cos x-1}{2\cos^2 x+\cos x-1}$.

1.10.4. $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

1.10.5. 讨论由下列函数复合而成的函数$f[g(x)]$的连续性：

(1) $f(u)=\begin{cases}u^2, & u\leqslant 1,\\ 2-u, & u>1,\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1,\\ x+4, & x>1;\end{cases}$

(2) $f(u)=\begin{cases} u^2, & u\leqslant 1, \\ 1, & 1<u\leqslant 5, \\ u-4, & u>5, \end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 1, \\ x+4, & x>1; \end{cases}$

(3) $f(u)=\dfrac{u+|u|}{2}$, $u\in(-\infty,+\infty)$, $\quad g(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ x^2, & x\geqslant 0; \end{cases}$

(4) $f(u)=\begin{cases} -u, & u\leqslant 1, \\ u+1, & u>1, \end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases} x^3, & x\leqslant 1, \\ 3x-2, & x>1. \end{cases}$

(B)

1.10.6. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0, \\ b, & x=0, \\ \dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x^2+x)], & x>0. \end{cases}$$

问 a,b 为何值时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续．

1.10.7. 设函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x^n+e^x)}{n}\ (x>0).$$

问 $f(x)$在其定义域内是否连续?

求题 1.10.8～1.10.11 中的各极限：

1.10.8. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

1.10.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}\ (a>0)$.

1.10.10. $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{e^\alpha-e^\beta}{\alpha-\beta}$.

1.10.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}\ (\alpha\neq\beta)$.

1.10.12. 设 $\lim u(x)=a>0$，$\lim v(x)=b$. 证明：$\lim u(x)^{v(x)}=a^b$，即

$$\lim u(x)^{v(x)}=(\lim u(x))^{\lim v(x)},$$

其中记号“lim”下面可以为任一极限过程，如 $x \to x_0$，$x \to \infty$ 等．

求题 1.10.13～1.10.22 中的各极限：

1.10.13. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2^x+3^x+5^x)^{\frac{3}{x}}$.

1.10.14. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$.

1.10.15. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+663}{x-3} \right)^{3x-2}$.

1.10.16. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2} \right)^n (a>0,b>0)$.

1.10.17. $\lim\limits_{x \to 0} \left[e^{x+1}(1+e^x \sin^2 x)^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}} \right]$.

1.10.18. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

1.10.19. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}} \right)^x$.

1.10.20. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a>0,b>0,c>0)$.

1.10.21. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$.

1.10.22. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$.

1.10.23. 已知 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a} \right)^x = 4$，求常数 a.

1.10.24. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为连续函数．证明：

$$\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\} \text{和} \psi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

也是连续函数．

(C)

1.10.25. 设 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_{n+2}=\sqrt{x_n x_{n+1}}$ $(n=1,2,\cdots)$．求 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

1.10.26. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续．证明：对一切 x，使得 $f(2x)=f(x)e^x$ 成立的充分必要条件是 $f(x)=f(0)e^x$.

十一、闭区间上连续函数的性质

(A)

1.11.1. 下列各函数在给定的区间内，哪些有上界、哪些有下界？哪些有最大值、哪些有最小值？

(1) $f(x)=x$, $(-1,1)$;　　(2) $f(x)=x^2$, $(-1,1)$;

(3) $f(x)=x^3$, $(-\infty,0]$.

1.11.2. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在闭区间 $[a,b]$ 上连续．证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)+g(x)|\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|+\max_{a\leqslant x\leqslant b}|g(x)|.$$

1.11.3. 证明：方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根．

1.11.4. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a)<a$，$f(b)>b$. 证明：至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

1.11.5. 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a,b]$ 上的任意两点 x、y，恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，其中 L 为正常数，且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证明：至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

(B)

1.11.6. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 内连续，且 $f(a+0)$ 存在．证明 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 内有界．

1.11.7. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $f(a+0)$、$f(b-0)$ 存在．证明：$f(x)$ 可以取到介于 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 之间但不等于 $f(a+0)$ 及 $f(b-0)$ 的一切值．

1.11.8. 证明：方程

$$\frac{5}{x-1}+\frac{7}{x-2}+\frac{16}{x-3}=0$$

有一个根介于 1 和 2 之间，另有一个根介于 2 和 3 之间．

1.11.9. 证明：任何具有实系数的一元三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 至少有一实根．

1.11.10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ $(a>0)$ 上连续，$f(0)=f(2a)$．证明：方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上至少有一个根．

*1.11.11. 证明：函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 内一致连续．

*1.11.12. 证明：函数 $f(x)=x+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致连续．

1.11.13. 设函数 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ($a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实常数)．证明：

(1) 若 $a_n>0$ 且 n 为奇数，则方程 $f(x)=0$ 至少有一负根；

(2) 若 $a_n<0$，则方程 $f(x)=0$ 至少有一正根；

(3) 若 $a_n<0$ 且 n 为偶数，则方程 $f(x)=0$ 还有一个负根．

1.11.14. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，c、$d\in(a,b)$，$t_1>0$，$t_2>0$．证明：在 $[a,b]$ 上必有点 ξ，使得

$$t_1f(c)+t_2f(d)=(t_1+t_2)f(\xi).$$

1.11.15. 证明：方程 $x^3+px+q=0$ $(p>0)$ 有且只有一个实根．

(C)

1.11.16. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$．证明：对自然数 $n\geqslant 2$，必有点 $\xi=\xi(n)\in(0,1)$，使得

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right).$$

*1.11.17. 设函数 $f(x)$ 对于 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意两点 x、y，恒有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant q|x-y|,$$

其中 $0<q<1$．任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，令 $x_n=f(x_{n-1})$ $(n=1,2,\cdots)$．证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$ 存在，且 $f(x^*)=x^*$．

第二章　导数与微分

一、导数的概念

(A)

2.1.1. 按照导数定义，求下列函数的导数：

(1) $y=x^2+3x-1$；　　(2) $y=\sin(3x+1)$；

(3) $y=\cos(2x-3)$.

2.1.2. 一细铁杆，它在$[0,x]$一段的质量为

$$M=\frac{1}{3}\left(\pi\rho\tan^2\frac{\theta}{2}\right)x^3,$$

其中ρ,θ为常数，求该细铁杆在$x=2$处的线密度.

2.1.3. 如果一个轴的热膨胀是均匀的，则当轴的温度升高1℃时，其单位长度的增量就称为该轴的线性热膨胀系数. 如果一个轴的热膨胀过程是非均匀的，设$l=f(T)$（这里l是轴长，T是轴的温度），试给出$T=T_0$时该轴的线性热膨胀系数的定义.

(B)

2.1.4. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & x<0;\\ 0, & x=0;\\ \sin x, & x>0.\end{cases}$$

试问$f(x)$在$x=0$处是否可导？

2.1.5. 设函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}$，证明：$f(x)$在$x=0$处右

连续，但右导数不存在.

2.1.6. 设函数$f(x)=\begin{cases}\sin x+\dfrac{\pi}{2}, x\geqslant 0;\\ \arctan\dfrac{1}{x}, x<0.\end{cases}$

试问 $f(x)$在 $x=0$ 处是否可导？

2.1.7. 设函数 $\varphi(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$. 讨论下列函数在点 x_0 处的可导性：

(1) $f(x)=(x-x_0)\varphi(x)$；　　(2) $g(x)=|x-x_0|\varphi(x)$.

2.1.8. 确定 a、b 的值，使函数

$F(x)=\begin{cases}\sin ax, & x\leqslant 0;\\ \ln(1+x)+b, & x>0\end{cases}$在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处可导.

2.1.9. 按照导数定义求函数 $y=e^{\sqrt{x}}$的导数.

2.1.10. 证明：若偶函数可导，则它的导函数是奇函数；若奇函数可导，则它的导函数是偶函数.

2.1.11. 证明：可导的周期函数的导函数仍为周期函数.

2.1.12. 设函数 $f(t)=\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)-1\right]\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}t^2\right)-2\right]\cdots\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}t^{100}\right)-100\right]$,求 $f'(1)$.

2.1.13. 设 $\varphi(x)=\dfrac{x+\sin x}{x^2}F(x)$. 其中 $F(x)$为奇函数且在 $x=0$. 处可导，问 $x=0$ 为函数 $\varphi(x)$的何种间断点？并说明理由.

2.1.14. 确定 a，b 的值，使函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant\dfrac{\pi}{4};\\ ax+b, & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

在 $x=\dfrac{\pi}{4}$处可导.

2.1.15. 设函数 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$，其中函数 $\varphi(x)$在$(-\infty, +\infty)$上有定义，且 $\varphi(x)$ 在点 a 处可导. 求$f'(0)$.

2.1.16. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=A$. 证明函数 $f(x)$在 $x=a$ 处可导.

2.1.17. 已知函数 $f(x)$可导，且对任何实数 x、y 满足：

(1) $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)$；

(2) $f'(0)=e$.

证明：$f'(x)=f(x)+e^{x+1}$.

2.1.18. 设函数 $f(x)$在(a,b)内有定义，$x_0\in(a,b)$. 证明：$f(x)$在 x_0 处可导的充要条件是存在函数 $g(x)$，满足：$g(x)$在 x_0 处连续，且 $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)g(x)$ $(a<x<b)$，$g(x_0)=f'(x_0)$.

(C)

2.1.19. 下列条件与函数 $f(x)$在 x_0 处可导的定义是否等价？

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$存在；

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-\beta h)}{(\alpha+\beta)h}$存在（$\alpha$、$\beta$ 为正常数）；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$存在（$n$ 为正整数）；

(4) 对任何有理数列$\{r_n\}$：$r_n\to 0$ $(n\to\infty)$，$r_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0+r_n)-f(x_0)}{r_n}$存在；

(5) $\lim\limits_{h\to +0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$和 $\lim\limits_{h\to +0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$均存在且相等.

2.1.20. 设函数 $f(x)$在$(-1,1)$内有定义，且 $f'(0)$存在，$\{a_n\}$、$\{b_n\}$为两个数列，满足：

(1) $-1<a_n<0<b_n<1$ $(n=1,2,\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(0).$$

二、函数的和、差、积、商的求导法则

(A)

2.2.1. 求下列各函数的导数(其中 x、z、y 是变量,a、b、c、m、n、p、q 是常量):

(1) $y=\sqrt{x\sqrt{x^3}}$; (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}$;

(3) $y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$; (4) $y=\dfrac{mz^2+nz+4p}{p+q}$;

(5) $y=\dfrac{1}{x^{1.4}}(x^3+4x-3)$; (6) $y=\dfrac{ax^3+bx^2+c}{(a+b)x}$.

2.2.2. 设函数 $y(x)=(1+x^3)\left(5-\dfrac{1}{x^2}\right)$, 求 $y'(1)$, $y'(a)$.

求题 2.2.3～2.2.12 中各函数的导数:

2.2.3. $y=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

2.2.4. $y=\varphi\sin\varphi+\dfrac{\cos\varphi}{\varphi}$.

2.2.5. $y=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}$.

2.2.6. $y=(a\sin x+x\cos a)(a\cos x+x\sin a)$.

2.2.7. $y=\dfrac{\sin t}{1+t\sin\sqrt{\pi}}$.

2.2.8. $y=\dfrac{x}{4^x}+\ln 2$.

2.2.9. $y=\dfrac{\sin x}{1+\tan x}$.

2.2.10. $y=\dfrac{a^x\sin x}{1+x}$.

2.2.11. $y=x\sec x-\dfrac{e^x}{x^2}$.

2.2.12. $y=x\cot x-\csc x$.

2.2.13. 曲线 $y=e^x+1$ 上哪一点处的切线与直线 $2x-y+1=0$ 平行?

2.2.14. 在抛物线 $y=2x^2-4x+6$ 上取横坐标分别为 $x_1=1$, $x_2=2$ 的两点,并过这两点引割线,试确定抛物线上哪一点处的切线平行于所引的割线?

2.2.15. 试求曲线 $y=-\sqrt{x}+2$ 在它与直线 $y=x$ 的交点处的切线方程和法线方程.

2.2.16. 试求垂直于直线 $x-3y+1=0$ 且与曲线 $y=x^3+3x^2-1$ 相切的直线方程.

2.2.17. 确定 a、b 之值,使曲线 $y=x^2+ax+b$ 与直线 $y=2x$ 相切于点(2,4).

(B)

2.2.18. 抛物线 $y=x^2$ 上哪些点处的切线和直线 $3x-y+1=0$ 构成 45°角?

2.2.19. 在直线 $x-y+1=0$ 与抛物线 $y=x^2-4x+5$ 的两交点处分别作抛物线的法线. 试求此直线和这两条法线所围成的三角形的面积.

2.2.20. 利用公式 $\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $(x\neq 1)$ 以及求导法则,求下列和式的和函数:

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}kx^{k-1}$;　　(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2x^k$.

2.2.21. 求曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的公切线方程.

2.2.22. 求曲线 $y=x^2+ax$ 与曲线 $y=x^2+bx$ $(a\neq b)$ 的公切线方程.

(C)

2.2.23. 在坐标平面上,将连结 $O(0,0)$、$A(1,0)$ 的线段 $\overline{OA}$

n 等分，从靠近原点开始，设各分点依次为 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$，从点 $P_k(k=1,2,\cdots,n-1)$ 引抛物线 $y=x^2$ 的切线（此切线不是 x 轴），设切点为 $Q_k(k=1,\cdots,n-1)$. 试求：

(1) 点 Q_k 的坐标；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k$，其中 S_k 为 $\triangle P_kQ_kA$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$ 的面积.

2.2.24. 设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)g(x)$，其中 a、b 为方程 $f(x)=0$ 的两个相邻的单根，$g(x)$ 为多项式. 证明：

(1) $g(a)\cdot g(b)>0$；

(2) 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

三、反函数的导数　复合函数的求导法则

(A)

求题 2.3.1～2.3.18 中各函数的导数：

2.3.1. $y=\dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}$.

2.3.2. $y=\sqrt{1-x^2}\arccos x+\sin\dfrac{\pi}{4}$.

2.3.3. $y=\dfrac{\sqrt{x}\arctan x}{1+x^2}$.

2.3.4. $y=\dfrac{\log_2 x-\ln x}{x}$.

2.3.5. $y=x^5\sqrt[3]{x^6-8}$.

2.3.6. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

2.3.7. $y=x\cdot\arcsin\sqrt{1-4x}$.

2.3.8. $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.　　2.3.9. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.

2.3.10. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin\dfrac{1}{x}}}$.

2.3.11. $y=\dfrac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$

2.3.12. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$.

2.3.13. $y=\arcsin\sqrt{\ln\cos x}$.

2.3.14. $y=\log_5\dfrac{x}{1-x}$.

2.3.15. $y=\csc\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$.

2.3.16. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

2.3.17. $y=\operatorname{arccot}\sqrt{x^3-2x}$.

2.3.18. $y=\lg\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{2+x}}$.

2.3.19. 设函数 $\varphi(t)=f(x_0+at)$，又 $f'(x_0)=a$. 求 $\varphi'(0)$.

2.3.20. 曲线 $y=x\ln x$ 上哪一点处的法线平行于直线 $2x+4y+3=0$，并求该法线方程.

2.3.21. 设曲线 $y=e^{2x}+x^2$ 在点 (0，1) 处的法线为 L，求原点到 L 的距离.

求题 2.3.22～2.3.25 中各函数的导数(其中 $\varphi(x)$、$\psi(x)$、$f(x)$、$g(x)$均为可导函数)：

2.3.22. $y=f(e^x)e^{f(x)}$.

2.3.23. $y=a^{\varphi(x)\psi(x)}(a>0,a\neq1)$.

2.3.24. $y=\log_{f(x)}g(x)$ $(f(x)>0,f(x)\neq 1,g(x)>0)$.

2.3.25. $y=\arctan\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ $(\psi(x)\neq 0)$.

(B)

2.3.26. 设函数 $F(x)$在 $x=0$ 处可导，又

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$$

求函数 $F[\varphi(x)]$在 $x=0$ 处的导数.

2.3.27. 设函数 $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ x, x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$ 求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g[f(x)]$.

2.3.28. 设函数

$$g(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

又函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可导. 求$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f[g(x)]\right|_{x=0}$.

2.3.29. 设函数 $f_1(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_n(x)=f_1[f_{n-1}(x)]$, $n=2,3,\cdots$. 求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

2.3.30. 求经过原点且与曲线 $y=\frac{x+9}{x+5}$相切的切线方程.

2.3.31. 问 a 为何值时,直线 $y=x$ 与对数曲线 $y=\log_a x$ 相切,并求切点的坐标.

2.3.32. 设 $f(x)$为可导函数,且 $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$. 求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}$,其中 $u=\cos^2 x$, $v=\cos x$.

2.3.33. 问函数 $f(x)$, $g(x)$, $f[g(x)]$在 $x=0$ 处是否可导? 其中 $f(x)$与 $g(x)$分别为:

(1) $f(x)=x^2, g(x)=|x|$;

(2) $f(x)=x^3, g(x)=|x|$;

(3) $f(x)=|x|, g(x)=x^2$;

(4) $f(x)=|x|, g(x)=x^3$;

(5) $f(x)=2x+|x|, g(x)=2x-|x|$;

(6) $f(x)=2|x|+x, g(x)=2|x|-x$.

四、初等函数的导数

(A)

求题 2.4.1～2.4.22 中各函数的导数：

2.4.1. $y=x\sec^2(2x)-\tan\frac{1}{x}$. 2.4.2. $y=\left(\arccos\frac{1}{x}\right)^2\cdot e^{-x}$.

2.4.3. $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$. 2.4.4. $y=\frac{1}{\tan^2(2x)}$.

2.4.5. $y=\ln\arctan\frac{1}{1+x}$. 2.4.6. $y=\cos\frac{\arcsin x}{2}$.

2.4.7. $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$. 2.4.8. $y=\cos^2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$.

2.4.9. $y=\frac{-\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\tan\frac{x}{2}$.

2.4.10. $y=\frac{1}{\cos(x-\cos x)}$.

2.4.11. $y=\ln\tan\frac{x}{2}-\cot x\cdot\ln(1+\sin x)-x$.

2.4.12. $y=e^x\cdot\operatorname{sh}x$. 2.4.13. $y=(e^{x+2}+1)\operatorname{ch}x$

2.4.14. $y=\frac{\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}$. 2.4.15. $y=\operatorname{arsh}(x^2+1)$.

2.4.16. $y=\operatorname{arch}e^{2x}$. 2.4.17. $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh}x)$.

2.4.18. $y=\operatorname{th}(\ln x)$. 2.4.19. $y=\arctan(\operatorname{th}x)$.

2.4.20. $y=\operatorname{th}(1-x^2)$. 2.4.21. $y=\ln\cos\arctan(\operatorname{sh}x)$.

2.4.22. $y=\ln\operatorname{ch}x+\frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

(B)

2.4.23. 某一曲柄连杆机构如图 2-1 所示，设曲柄 OA 以角速度 ω 绕 O 点旋转. 求

(1) 连杆 AB 摆动的角速度$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$；

(2) 滑块滑动的速度$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

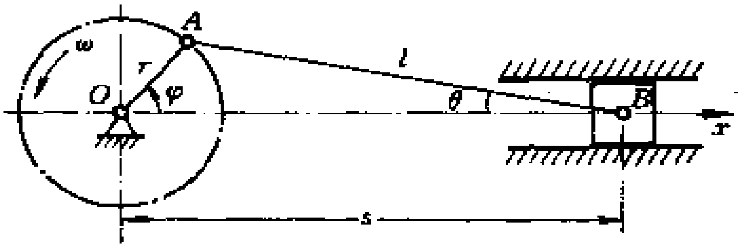


图 2-1

2.4.24. 设函数 $y=\max\limits_{x\in \mathbf{R}}\left\{\cos x,\ \left|\frac{2}{\pi}x+1\right|\right\}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2.4.25. 设函数 $y=\operatorname{ch} e^{x}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2.4.26. 设函数 $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$，求$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

2.4.27. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

试确定实数 α 的取值范围，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处分别具有以下性质：

(1) 连续但不可导；

(2) 可导但导函数不连续；

(3) 一阶导函数连续.

2.4.28. 研究函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{2}\sin\frac{1}{x}, & x>0, \\ x^{3}, & x\leqslant 0 \end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性、可导性及 $f'(x)$ 的连续性.

2.4.29. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x\leqslant 0, \\ \sin 2x+b, & x>0. \end{cases}$$

试问 a、b 为何值时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内为可导函数；当此函数可导时，求其导函数.

2.4.30. 设函数 $f(x)$在点 x_0 处可导，且 $f(x_0)\neq 0$，$g(x)=|f(x)|$. 证明函数 $g(x)$在 x_0 处可导，并求 $g'(x_0)$.

(C)

2.4.31. 设函数 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，其中 a_1，a_2，…，a_n 都是实数，n 为正整数. 已知对一切实数 x 有 $|f(x)|\leqslant\cdots|\sin x|$. 证明：

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

2.4.32. 设函数 $f(x)$可导且 $f(x)>0$. 证明曲线 $y=f(x)$与曲线 $y=f(x)\sin ax$(其中 $a\neq 0$)在它们的交点处有公共的切线.

五、高 阶 导 数

(A)

2.5.1. 设函数 $f(x)=(x-a)^2\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$具有一阶连续导数，求 $f''(a)$.

2.5.2. 求下列各函数的二阶导数：

(1) $y=xe^{x^2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{a+\sqrt{x}}$；

(3) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$；　　(4) $y=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x$；

(5) $y=\left(\dfrac{b}{x}\right)^b+\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

2.5.3. 设函数 $f(x)=e^{2x-1}$，求 $f''(0)$.

2.5.4. 设函数 $y=x^3\ln x$，求 $y^{(4)}(x)$.

2.5.5. 设函数 $\rho=a\sin 2\varphi$，求$\frac{\mathrm{d}^4\rho}{\mathrm{d}\varphi^4}$.

2.5.6. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, x<0,\\ \ln(1+x), x\geqslant 0.\end{cases}$$

问 a、b、c 取何值时 $f''(0)$存在？

2.5.7. 求下列各函数的二阶导数(其中函数 $f(x)$ 二阶可导)：

(1) $y=f(\mathrm{e}^x)$；　　(2) $y=\sqrt{f(x)}$ $[f(x)>0]$；

(3) $y=f(x)\mathrm{e}^{f(x)}$；　　(4) $y=(\ln x)f(x^2)$；

(5) $y=f(x^2)+\ln f(x)$ $[f(x)>0]$；

(6) $y=\mathrm{e}^{x^2}f(x^{e^2})$.

2.5.8. 设函数 $y=f[\varphi(x)]$，其中 f 与 φ 皆为三阶可导函数，试求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2.5.9. 验证函数 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$($C_1$、$C_2$、$\lambda_1$、$\lambda_2$ 都是常数)满足关系式 $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0$.

2.5.10. 验证函数 $y=C_1\cos \mathrm{e}^x+C_2\sin \mathrm{e}^x$($C_1$、$C_2$ 都是常数)满足关系式 $y''-y'+y\mathrm{e}^{2x}=0$.

2.5.11. 验证函数 $y=C_1\cos \ln x+C_2\sin \ln x$ (C_1、C_2 都是常数) 满足关系式 $x^2y''+xy'+y=0$.

(B)

求题 2.5.12～2.5.15 中各函数的 n 阶导数的一般表达式：

2.5.12. $y=x^2\ln x$.

2.5.13. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$.

2.5.14. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$.

2.5.15. $y=\sin^3x$.

2.5.16. 设函数 $y=(x^2-1)\mathrm{e}^x$，求 $y^{(6)}(x)$.

2.5.17. 设函数 $y=\frac{1}{x}e^{x}$，求 $y^{(10)}(x)$.

2.5.18. 设函数 $g(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\sin\frac{x}{t}\left[f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)-f(x)\right]$，其中 $f(x)$ 具有二阶导数，求 $g'(x)$.

2.5.19. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$f'(a)\neq 0$，

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{f'(a)}\left[1+\frac{f(x)-f(a)}{f'^2(a)}\left(f'(a)-\frac{1}{2}f''(a)\right)\right],$$

求 $\varphi'(a)$ 及 $\varphi''(a)$.

2.5.20. 计算 $\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+x-2}\right)^{(100)}$.

2.5.21. 设函数 $f(x)$ 是二次多项式，a 为任意实数. 证明：

$$f(x)=\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+f'(a)(x-a)+f(a).$$

2.5.22. 设函数 $y=\arcsin x$，求 $y^{(n)}(0)$.

2.5.23. 设函数 $F(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，其中函数 $\varphi(x)$ 在点 a 的某一邻域内具有 $n-1$ 阶连续导数，求 $F^{(n)}(a)$.

2.5.24. 证明下列各等式：

(1) $[F(ax+b)]^{(n)}=a^nF^{(n)}(ax+b)$，其中函数 $F(x)$ 具有 n 阶导数.

(2) $(\sin^4x+\cos^4x)^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

(3) $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.

(4) $\left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}+\frac{1}{2^{4n+1}}\cos 2x\right)^{(4n+1)}=(\cos x-\sin x)^2$.

(5) $F^{(2n)}(x)=(-1)^n(\omega^{2n}x\sin\omega x-2n\omega^{2n-1}\cos\omega x)$，其中 $F(x)=x\sin\omega x$.

(6) $y^{(n)}=(n-1)!\cos^ny\cdot\sin\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]$，其中 $y=\arctan x$.

2.5.25. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明：$f(x)$在 $x=0$ 处具有任意阶导数，且 $f^{(n)}(0)=0$.

通过所设的自变量变换，将 2.5.26～2.5.28 各题中的关系式换成以 t 为自变量的关系式：

2.5.26. $t=\sqrt{x}$，$4x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2(1-\sqrt{x})\dfrac{dy}{dx}-6y=e^{3\sqrt{x}}$.

2.5.27. $x=\sin t$，$(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+a^2y=0$.

2.5.28. $x=e^t$，$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+2y=0$.

(C)

2.5.29. 设 $y=\sin(A\arcsin x)$，A 是常数. 求 $y^{(n)}(0)$.

2.5.30. 证明：$\dfrac{d^n(x^n\ln x)}{dx^n}=n!\left(\ln x+\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

六、隐函数的导数　由参数方程所确定的函数的导数　相关变化率

(A)

用对数求导法，求题 2.6.1～2.6.5 中各函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$：

2.6.1. $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.　　2.6.2. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

2.6.3. $y=\sqrt{e^{1/x}\sqrt{x\sin x}}$.

2.6.4. $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b(a>0,b>0)$.

2.6.5. $y=\sqrt{(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdot\cdots\cdot(x-c_n)^{k_n}}$ (C_i、k_i 都为常数，$i=1,2,\cdots,n$).

求题 2.6.6～2.6.11 中由方程所确定的隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$：

2.6.6. $y\sin x-\cos(x-y)=0$. 2.6.7. $e^{xy}+\sin(x^2y)=y^2$.

2.6.8. $\frac{y}{x}+e^{y/x}-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=0$. 2.6.9. $x\cot y=\cos(xy)$.

2.6.10. $x=e^{\frac{x-y}{y}}$.

2.6.11. $(\cos x)^y=(\sin y)^x$.

2.6.12. 验证由方程 $xy-\ln y=1$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 满足关系式 $y^2+(xy-1)\frac{dy}{dx}=0$.

2.6.13. 设 $x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$，$y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. 求$\frac{dy}{dx}$.

2.6.14. 验证 $x=\frac{1+\ln t}{t^2}$，$y=\frac{3+2\ln t}{t}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 满足关系式：$y\frac{dy}{dx}=2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1$.

写出题 2.6.15～2.6.17 中各曲线上与给定的参数相对应的点处的切线方程及法线方程：

2.6.15. $x=2e^t+1$，$y=e^{-t}-1$，$t=0$.

2.6.16. $x=2\cos t$，$y=\sqrt{3}\sin t$，$t=\frac{\pi}{3}$.

2.6.17. $x=\frac{3at}{1+t^3}$，$y=\frac{3at^2}{1+t^3}$，$t=1$.

(B)

求题 2.6.18～2.6.23 中由方程所确定的隐函数 $y(x)$ 的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$：

2.6.18. $e^y+xy=e$. 2.6.19. $x^2+y^2=R^2$.

2.6.20. $y^2+2\ln y=x^4$. 2.6.21. $x+\arctan y=y$.

2.6.22. $y=1+xe^y$. 2.6.23. $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{y}{x}}$.

2.6.24. 设 $y=f(xy)$，$f''(x)$存在且 $f'(xy)\neq\frac{1}{x}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

2.6.25. 设方程 $x^2-xy+y^2=1$ 确定 y 是 x 的函数，求 y'、

y''、y'''.

2.6.26. 设 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$，求$\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$、$\frac{d^3y}{dx^3}$.

2.6.27. 设 $x=1+e^{a\varphi}$，$y=a\varphi+e^{-a\varphi}$，求$\frac{d^3y}{dx^3}$.

2.6.28. 设 $x=\ln\sqrt{1+t^2}$，$y=\arctan t$，求$\frac{d^3y}{dx^3}$.

2.6.29. 设 $x=\ln t$，$y=t^4$，求$\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=1}$.

2.6.30. 设物体的运动方程为

$$\begin{cases}x=v_0t\cos\alpha;\\ y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant T).$$

求：

(1) 该物体的 x 轴方向的分速度和 y 轴方向的分速度；

(2) 该物体速度的大小和方向；

(3) 该物体的 x 轴方向的加速度和 y 轴方向的加速度.

2.6.31. 某船被一绳索牵引靠岸，绞盘位于岸边比船头高4 m处，绞盘卷绕绳索的速率为 2 m/s（米/秒），问当船距岸边 8 m 时船的速率是多少？

2.6.32. 设有一长度为 5 m 的梯子贴靠在铅直的墙上，其下端在地板上滑动，以 3 m/s 的速率离开墙脚，问

(1) 当梯子下端离开墙脚 1.4 m 时，其上端下滑之速率为多少？

(2) 当梯子下端离墙脚多少米时，梯子的上、下端能以相同的速率移动？

(3) 当梯子下端离墙脚多少米时，梯子上端下滑之速率为 4 m/s？

2.6.33. 设有一截面为倒置的等边三角形两端封闭的水槽，其长为 20 m，若以 3 m^3/s 的速率将水注入槽内，求在水面高为 4 m时槽内水面上升的速率.

2.6.34. 设有一半径为 R 的圆在横坐标轴上方沿着横轴正向作无滑动的滚动，已知圆心以常速 v 移动，试求圆周上一定点的横坐标和纵坐标的变化率，并求该点速度大小和方向.

2.6.35. 设 $f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，证明：$f'(0)=n!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

2.6.36. 设方程 $y=F(x^2+y^2)+F(x+y)$ 确定 y 是 x 的函数，又 $F(x)$ 可导，且 $F'(2)=\frac{1}{2}$，$F'(4)=1$，$y(0)=2$. 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

2.6.37. 求曲线 $\begin{cases}x+t(1-t)=0,\\ te^y+y+1=0\end{cases}$ 在对应于 $t=0$ 的点处的切线方程.

2.6.38. 试问曲线 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=\frac{\pi}{2}-\arctan t\end{cases}$ 在哪一点处的切线平行于直线 $x+2y=0$.

2.6.39. 证明星形线 $x=a\cos^3t$，$y=a\sin^3t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 上任一点(不在坐标轴上)处的切线被 x 轴与 y 轴所截得的线段之长是定数.

2.6.40. 设曲线 $\begin{cases}x=a\left(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t\right),\\ y=a\sin t\end{cases}$ $(a>0, 0<t<\pi)$ 上任一点 $P(x,y)$ 处的切线与 x 轴相交于点 Q. 证明线段 PQ 之长是定数.

2.6.41. 求曲线 $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=2\sin t\end{cases}$ 与曲线 $\begin{cases}x=t,\\ y=t\end{cases}$ 的交角.

2.6.42. 求心形线 $r=2(1-\cos\theta)$（见附录Ⅷ(9)）在对应于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的点处的切线方程.

2.6.43. 证明阿基米德螺线 $r=a\theta$（见附录Ⅷ (10)）与双曲螺线 $r=\frac{a}{\theta}$（见附录Ⅷ (12)）正交.

2.6.44. 证明两条心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 与 $r=a(1-\cos\theta)$

正交.

2.6.45. 设有一路灯高 4 m，某人身高 1.6 m，以 84 m/min（米/分）的速率从灯下沿直线方向离去，试求该人的头影的移动速率和身影的伸长速率.

2.6.46. 设某一等边三角形的边长为 a m，若当边长以 10 m/min的速率增长时，其面积就以 10 m^2/s的速率增加. 求 a 的值.

七、函数的微分及其应用

(A)

2.7.1. 求函数 $y=\arctan x$ 当 $x=\frac{1}{2}$，$\Delta x=0.01$ 时的微分.

2.7.2. 求函数 $y=\ln(1+x^2)$ 当 $x=1$，$\Delta x=0.1$ 时的微分.

2.7.3. 设函数 $y=f(x)$在某点处自变量的增量 $\Delta x=0.2$，对应的函数增量的线性主部等于 0.8，试求 $y=f(x)$在该点处的导数.

2.7.4. 已知函数 $f(x)=x^2$ 在某点处自变量的增量 $\Delta x=0.2$，对应的函数增量的线性主部 $df(x)=-0.8$，试求自变量的始值.

2.7.5. 求下列各函数的微分：

(1) $y=\ln\tan\frac{x}{2}$；　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$；

(3) $y=x\arctan\sqrt{x}$；　　(4) $y=5^{\ln\tan x}$；

(5) $y=\frac{\cos x}{1-x^2}$；　　(6) $y=2^{-\frac{1}{\cos x}}$；

(7) $y=x^{5x}$；　　(8) $y=\sin^2\frac{1}{1-x}$.

2.7.6. 求下列各函数的微分：

(1) $y=\frac{1}{(\tan x+1)^2}$当自变量 x 由$\frac{\pi}{6}$变到$\frac{61\pi}{360}$时；

(2) $y=\cos^2\varphi$ 当自变量 φ 由 $\frac{\pi}{3}$ 变到 $\frac{121\pi}{360}$ 时；

(3) $y=\arctan\sqrt{x}$ 当 x 由 4 变到 3.96 时；

(4) $y=e^{\sqrt{x}}$ 当 x 由 9 变到 8.99 时.

求题 2.7.7～2.7.12 中各复合函数的微分：

2.7.7. 函数由 $y=\sqrt[3]{x^2+5x}$，$x=t^3+2t+1$ 复合而成.

2.7.8. 函数由 $y=\sin^2 x$，$x=\ln(3t+1)$ 复合而成.

2.7.9. 函数由 $y=e^{\frac{1}{x}}$，$x=\arctan\sqrt{t}$ 复合而成.

2.7.10. 函数由 $y=\log_a x$，$x=\sqrt{t+1}$ 复合而成.

2.7.11. 函数由 $y=e^z$，$z=\frac{1}{2}\ln t$，$t=2u^2-3u+1$ 复合而成.

2.7.12. 函数由 $y=\ln\tan\frac{u}{2}$，$u=\arcsin v$，$v=\cos 2s$ 复合而成.

2.7.13. 试求当 x 由 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{271\pi}{1080}$ 时函数 $y=\tan x$ 的增量的近似值.

2.7.14. 利用微分计算下列各函数值的近似值（计算到小数第 4 位）.

(1) $\arctan 1.02$； (2) $\arcsin 0.47$；

(3) $e^{1.01}$； (4) $\sqrt[3]{1.02}$；

(5) $\lg 11$； (6) $\cos 151°$；

(7) $\sqrt[5]{254}$.

2.7.15. 设 $f(x)=e^{0.1x(1-x)}$，试求 $f(1.05)$ 的近似值.

2.7.16. 设有一半径为 45 cm 的圆形铁板，受热后其直径增加了 1 mm，试利用微分计算面积增量的近似值.

2.7.17. 有一内直径为 15 cm 的空心薄壁铜球，壁厚 0.2 mm，试求该空心球的质量的近似值（铜的密度为 8.9 g/cm³）.

2.7.18. 设圆的半径为 4.24 ±0.005 m．试求它的面积，并估计绝对误差.

2.7.19. 设 $u=\frac{x}{10-x}$，x 的值为 0.2 ± 0.001，求 u 的相对误差.

2.7.20. 有一圆柱，高为 25 cm，半径为 20 cm±0.05 cm. 试分别求该圆柱的侧面积、体积的相对误差.

(B)

2.7.21. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x}, & x\neq0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

证明：(1) $f(x)$在 $x=0$ 处可微；

(2) $f'(x)$在 $x=0$ 处不可微.

2.7.22. 利用微分形式不变性，求函数 $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$的微分，并计算 $\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=\sqrt{2}\\ \mathrm{d}x=0.01}}$.

2.7.23. 按微分定义证明函数 $y=\sqrt{x}$ 在 x_0 ($x_0>0$) 处可微.

2.7.24. 设 $A>0$，且 $|B|\ll A^n$①，证明 $\sqrt[n]{A^n+B}\approx A+\frac{B}{nA^{n-1}}$.

2.7.25. 利用题 2.7.24 的结论，计算下列各方根的近似值：

(1) $\sqrt[10]{1000}$；　(2) $\sqrt[4]{1.01}$；　(3) $\sqrt{120}$.

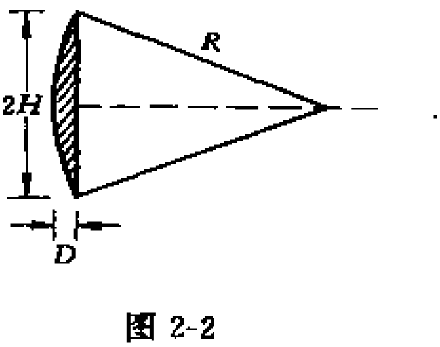


图 2-2

2.7.26. 一凸透镜的凸面是半径为 R 的球面的一部分（图 2-2），透镜的口径为 $2H$ ($H\ll R$)，证明 $D\approx\frac{H^2}{2R}$（其中 D 是平凸透镜的厚度）.

---

① 记号$|B|\ll A^n$ 表示$|B|$比 A^n 小得多.

2.7.27. 计算立方体体积时，要求精确度在1%以内. 问这时测量立方体的棱长的相对误差不能超过多少？

2.7.28. 设 $y_1=\lg\sin\varphi$, $y_2=\lg\tan\varphi$, 且绝对误差 $\delta_{y_1}=\delta_{y_2}$, 依正弦对数表求角 φ 的绝对误差为 $\delta_{1\varphi}$, 依正切对数表求角 φ 的绝对误差为 $\delta_{2\varphi}$. 证明 $\delta_{2\varphi}<\delta_{1\varphi}$.

八、杂　　题

(B)

2.8.1. 求 $y=|\ln|x||$ 在点 $x=1$ 及 $x=-1$ 处的左、右导数.

2.8.2. 设 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)=0$，证明 $f'(a)=0$.

2.8.3. 设函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，又 $F(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(1-\cos x)}{\tan(x^2)}$.

2.8.4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足：$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)$，$f'_-(b)$ 存在且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$. 证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内存在零点.

2.8.5. 设函数 $F(x)$、$G(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上均有定义，且满足：

(1) 任给 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，有

$$F(x+y)=F(x)G(y)+F(y)G(x);$$

(2) $F(0)=0, F'(0)=1, G'(0)=0$.

证明函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $F'(x)=G(x)$.

2.8.6. 设函数 $f(x)$ 对任何实数 x_1、x_2，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，且 $f'(0)=1$. 证明 $f'(x)=f(x)$.

2.8.7. 设曲线 $y=x^n$ $(n\in\mathbb{N})$ 上点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^n$.

2.8.8. 设有抛物线 $y=px^2+q$ ($p>0$, $q>0$), $P(a,b)$ 为位于此抛物线下方的区域内的任一点. 证明过点 $P(a, b)$ 必可作此抛物线的两条切线.

2.8.9. 设

$$h(x)=\begin{cases}f(x), x\in(x_0-\delta, x_0),\\ g(x), x\in[x_0, x_0+\delta).\end{cases}$$

其中 $f(x)$、$g(x)$ 为下列两种情形之一:

(1) $f(x)$和 $g(x)$皆在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内有定义、在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0)=g'(x_0)$;

(2) $f(x)$在$(x_0-\delta, x_0)$内可导, $g(x)$在$(x_0, x_0+\delta)$内可导, $\lim\limits_{x\to x_0+0}g'(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f'(x)$均存在且相等.

问能否断定 $h(x)$在 x_0 处可导, 并说明理由.

2.8.10. 设函数 $f(x)$在 x_0 处可导, 问下述两个结论:

(1) 必存在 x_0 的某邻域, 使 $f(x)$在此邻域内有界;

(2) 必存在 x_0 的某邻域, 使 $f(x)$在此邻域内连续是否正确? 为什么?

2.8.11. 设 $f(x)$和 $g(x)$在 x_0 处均可导, 且当 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x), f'(x_0)=g'(x_0).$$

问能否断定函数 $h(x)$在 x_0 处可导, 并说明理由.

2.8.12. 设函数 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内可导, 问下述两个命题:

(1) 若 $g(x)$在$(-\infty, +\infty)$内可导, 且 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $f'(x)\leqslant g'(x)$;

(2) 若 $f(x)$在区间(a, b)内有界, 则 $f'(x)$在(a, b)内有界, 是否正确? 为什么?

2.8.13. 设存在常数 $\delta>0$, $L>0$, $\alpha>1$ 使当 $|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|\leqslant L(x-a)^{\alpha}$, 证明 $f'(a)$存在. 又若 $0<\alpha\leqslant1$, 问能否断定 $f'(a)$存在? 为什么?

2.8.14. 设函数 $f(x)$在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$. 求

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^{x}.$$

2.8.15. 求函数 $y=\frac{x^3}{1-x}$的 n 阶导数.

2.8.16. 设 $y=x^2\sin 3x$，求 $y^{(50)}$.

2.8.17. 设 $y=\arctan x$，求 $y^{(n)}_{(0)}$.

2.8.18. 设函数 $f(x)$在 $x\leqslant x_0$ 时有定义，且具有二阶连续导数，试确定 a、b、c 的值，使函数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\leqslant x_0, \\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0 \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数.

2.8.19. 证明函数 $F(x)=2x^2+x|x|$ 在 $x=0$ 处二阶导数不存在.

2.8.20. 设函数 $y(x)$由方程$\begin{cases} x=2t+|t|, \\ y=5t^2+4t|t| \end{cases}$确定. 求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

2.8.21. 将水注入深为 10 m、上顶直径为 6 m 的正圆锥形容器内，其流量为 8 $\mathrm{m^3/min}$，问当水深为 4 m 时，液面面积增大的速率是多少？

2.8.22. 设函数 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内可导，且 $f(x)\neq 0$. 证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln|f(x)|]=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

2.8.23. 利用题 2.8.22 的结论，证明：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln|x\pm\sqrt{x^2+a^2}|]=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right]=\frac{1}{a^2-x^2}$.

(C)

*2.8.24. 设函数 $f(x)$在$(a, +\infty)$内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\infty$

证明 $f(x)$在$(a,+\infty)$内不一致连续.

2.8.25. 设函数 $f(x)$在 x_0 处可导,$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$为趋于零的正数列,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$.

第三章　中值定理与导数的应用

一、中值定理

(A)

3.1.1. 证明：当 $x\geqslant 1$ 时，有 $2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi$.

3.1.2. 证明方程 $x^3+2x^2+2x-5=0$ 只有一个实根.

3.1.3. 证明下列不等式：

(1) $pb^{p-1}(a-b)\leqslant a^p-b^p\leqslant pa^{p-1}(a-b)$，其中 $0<b<a$，$p>1$；

(2) $\frac{1}{x+1}<\ln(1+x)-\ln x<\frac{1}{x}\quad(x>0)$；

(3) $e^x>1+x\quad(x\neq 0)$；

(4) $\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leqslant\tan\alpha-\tan\beta\leqslant\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}\ (0<\beta\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2})$.

3.1.4. 设函数 $f(x)$、$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，并对任何 x 恒有 $f'(x)>g'(x)$，且 $f(a)=g(a)$. 证明：

(1) 当 $x>a$ 时，$f(x)>g(x)$；

(2) 当 $x<a$ 时，$f(x)<g(x)$.

3.1.5. 设函数 $f(x)$在 (a,b) 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

(B)

3.1.6. 设函数 $f(x)$在 $[0,1]$ 上具有三阶导数，且$f(1)=0$，

又函数 $F(x)=x^3f(x)$. 证明：在 (0，1) 内至少存在一点 ξ，使 $F'''(\xi)=0$.

3.1.7. 设函数 $f(x)$在 [0，1] 上连续，在 (0，1) 内可导，且 $f(1)=0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

3.1.8. 设函数 $f(x)$在 $[a, b]$ 上可导 $(a>0)$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

3.1.9. 设函数 $f(x)$在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导，且对一切 x 均有 $xf'(x)+f(x)\neq 0$. 证明：对一切 $x\neq 0$，必有 $f(x)\neq 0$.

3.1.10. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是满足

$$a_1-\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$$

的实数. 证明：方程

$$a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$$

在$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$内至少有一个实根.

3.1.11. 设函数 $f(x)$的导函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内恒为常数. 证明：$f(x)$为线性函数.

3.1.12. 设 $f'(0)=k$，且对任何实数 x、y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 试证 $f'(x)$在 $(-\infty, +\infty)$ 内存在，并求 $f(x)$.

3.1.13. 设函数 $f(x)$在 $(a, +\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$都存在. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

3.1.14. 设函数 $f(x)$在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，又 $\lim\limits_{x\to a+0}f'(x)=l$. 证明：$f'_+(a)=l$.

3.1.15. 设函数 $f(x)$在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f(c)<0$ $(a<c<b)$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)>0$.

3.1.16. 设函数 $f(x)$在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内二阶可导，连结点 $A(a,f(a))$ 与点 $B(b,f(b))$ 的直线段交曲线 $y=f(x)$于点$M(c,f(c))$，其中 $a<c<b$. 证明：在 (a, b) 内至少存

在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

3.1.17. 设函数 $f(x)$和 $g(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)=0$.

3.1.18. 设函数 $f(x)$在区间 $[x_1,x_2]$ 上可导，且 $x_1x_2>0$. 证明：在 (x_1,x_2) 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

3.1.19. 设函数 $f(x)$在 $[0,c]$ 上可微，且 $f'(x)$在 $[0,c]$ 上单调减少，又 $f(0)=0$. 证明：$f(a+b)<f(a)+f(b)$，其中 $0<a<b<a+b<c$.

(C)

3.1.20. 证明：若函数 $f(x)$在有限开区间内可导且无界，则 $f'(x)$在该区间内也无界.

3.1.21. 设 $f(x)$为非线性函数，在 $[a,b]$ 上连续，在(a,b) 内可导，证明：至少存在一点 c $(a<c<b)$，使

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

3.1.22. 设函数 $f(x)$在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A>0$. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

3.1.23. 设函数 $f(x)$在 $[a,b]$ 上可导，证明：对介于$f'(a)$与 $f'(b)$之间的任何值 c，总有 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=c$（达布 (G. Darboux) 定理).

*3.1.24. 设函数 $f(x)$的导数 $f'(x)$在 $x=a$ 处的右极限存在，证明：$f(x)$在 $x=a$ 处的右极限也存在.

*3.1.25. 设函数 $f(x)$在有限区间 (a,b) 内可导，且$f'(x)$在该区间内有界. 问下列结论是否成立？

(1) $f(x)$在 (a,b) 内有界；

(2) $f(x)$在 (a, b) 内一致连续；

(3) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$与$\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$均存在.

二、洛必达法则

(A)

求题 3.2.1～3.2.19 中的各极限：

3.2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x-\arcsin x}$.　　3.2.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

3.2.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}$.　　3.2.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$.

3.2.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$.　　3.2.6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 5x}{\tan 3x}$.

3.2.7. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{\ln x\cdot\ln(x-1)}$.

3.2.8. $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

3.2.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$.

3.2.10. $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[3]{x}\ln x$.

3.2.11. $\lim\limits_{x\to a}[\cot(x-a)\arcsin(x-a)]$.

3.2.12. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.　　3.2.13. $\lim\limits_{x\to 1}\ln(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

3.2.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$.　　3.2.15. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

3.2.16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.　　3.2.17. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

3.2.18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{2x-\pi}$.　　3.2.19. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

3.2.20. 验证：极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$存在，但不能用洛必达法则计算.

(B)

3.2.21. 设函数$f(x)$在$(a-\pi, a+\pi)$内具有二阶连续导数，且$f(a)=0$. 证明：函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{\sin(x-a)}, & x\in(a-\pi,a)\cup(a,a+\pi);\\ f'(a), & x=a\end{cases}$$

在$(a-\pi, a+\pi)$内具有一阶连续导数.

3.2.22. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & x\neq 0;\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处的可微性.

求题3.2.23～3.2.32中的各极限：

3.2.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos x}{x^2\sin^2x}$.

3.2.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}$.

3.2.25. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\ln(1-x)+\tan\dfrac{\pi x}{2}}{\cot(\pi x)}$.

3.2.26. $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\sin\frac{1}{n}}\right)\quad(a>0)$.

3.2.27. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sqrt{1-x^2}\cdot\cot\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

3.2.28. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{x}}$.

3.2.29. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x\ln x)}{x^a}\quad(a>0)$.

3.2.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\dfrac{1}{e^{1/n}-1}\right)$.

3.2.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

3.2.32. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ ($a_i>0$, $i=1$, $2\cdots$, n).

3.2.33. 试求一个二次三项式 $P(x)$，使 $2^x=P(x)+o(x^2)$ $(x\to 0)$.

三、泰勒公式

(A)

3.3.1. 求函数 $f(x)=\ln(1-x)$的 n 阶麦克劳林公式.

3.3.2. 求函数 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$的 $2n$ 阶麦克劳林公式.

3.3.3. 求函数 $y=\sin^2 x$ 的 $2n$ 阶麦克劳林公式.

3.3.4. 求函数 $y=\dfrac{x}{x-1}$在 $x_0=2$ 处的三阶泰勒公式.

3.3.5. 求函数 $f(x)=x^2\ln x$ 在 $x_0=1$ 处的 n 阶泰勒公式 $(n>3)$.

3.3.6. 证明：$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{x^3}{16\ (1+\theta x)^{5/2}}$，其中 $0<\theta<1$.

3.3.7. 设函数 $f(x)=x^{10}-3x^6+x^2+2$，应用 $f(x)$在 $x_0=1$ 处的二阶泰勒公式来计算 $f(1.03)$的近似值（计算到小数第四位).

3.3.8. 设函数 $f(x)=x^{80}-x^{40}+x^{20}$，试按 $(x-1)$ 的乘幂展开 $f(x)$，并用所得展开式的前三项来计算 $f(1.005)$的近似值（计算到小数第四位).

3.3.9. 利用二阶泰勒公式计算 $\sqrt[3]{83}$的近似值，并估计误差

(精确到小数第六位).

(B)

3.3.10. 设 $P(x)$ 为 n 次多项式，且

$$P(a)\geqslant 0, P'(a)\geqslant 0, P''(a)\geqslant 0, \cdots, P^{(n-1)}(a)\geqslant 0, P^{(n)}(a)>0.$$

证明方程 $P(x)=0$ 没有大于 a 的实根.

3.3.11. 设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，$x>0$. 证明：

$$f(x)=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}x+\frac{11\mathrm{e}}{24}x^2+o(x^2)\ (x\to+0).$$

利用泰勒公式求题 3.3.12～3.3.18 中各极限：

3.3.12. $\lim\limits_{n\to\infty}n^4\left(\cos\frac{1}{n}-\mathrm{e}^{-1/2n^2}\right)$.

3.3.13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

3.3.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

3.3.15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{a+x}}{x}\quad(a>0)$.

3.3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$.

3.3.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\ln\frac{2+x}{2-x}\right)$.

3.3.18. $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})$.

3.3.19. 已知 $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)\quad(x\to 0)$，

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)\quad(x\to 0).$$

求
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)+\sin x-2x}{x^5}.$$

3.3.20. 将函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x\ (x>0)$ 按照 $\frac{1}{x}$ 的正整数幂展开至含 $\frac{1}{x^3}$ 的项为止.

3.3.21. 设函数 $f(x)$在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，且满足 $f(1)=f(0)$及$|f''(x)|\leqslant M$. 证明：对一切 $x\in[0,1]$，有 $|f'(x)|\leqslant\frac{M}{2}$.

3.3.22. 证明多项式$\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k-2x^k}{k}$能被 x^{n+1}整除.

3.3.23. 设函数 $f(x)$在 $(-1,1)$ 内具有任意阶导数，且在 $x=0$ 处各阶导数均不为零，又对$|x|<1$ 及自然数 $n\in\mathbb{N}_+$，有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$ $(0<\theta<1)$，求$\lim\limits_{x\to0}\theta$.

3.3.24. 设 A、B 两地间的距离为 s，今有一汽车从 A 地开出作直线行驶，经过时间 T 在 B 地停下. 证明：在行驶过程中有某一时刻，在该时刻汽车加速度的绝对值不小于$\frac{4s}{T^2}$.

(C)

3.3.25. 设函数 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有三阶导数，且满足条件：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$（$c$ 为有限数），$\lim\limits_{x\to\infty}f'''(x)=0$. 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$及$\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$.

3.3.26. 设函数 $f(x)$在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f''(x)\geqslant0$，又 $x_i\in(a,b)$，$p_i\geqslant0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$. 证明：

(1) $f(p_1x_1+p_2x_2)\leqslant p_1f(x_1)+p_2f(x_2)$；

(2) $f\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i)$.

3.3.27. 设函数 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有任意阶导数，且满足：

(1) 存在常数 $L>0$，使对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，$n\in\mathbb{N}$，有 $|f^{(n)}(x)|\leqslant L$；

(2) $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$，$(n=1, 2, \cdots)$.

证明：$f(x)\equiv 0$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

3.3.28. 设函数 $f(x)$在 $[a, b]$ 上具有三阶导数. 证明：

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3 f'''(\xi)\quad (a<\xi<b).$$

3.3.29. 设 $P(x)=c_n x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_0$ 为实系数多项式，其中某个 $c_p=0$ $(1\leqslant p\leqslant n-1)$ 且对一切 $i\neq p$，有 $c_i\neq 0$. 证明：若 $P(x)=0$ 有 n 个不同的实根，则 $c_{p-1}\cdot c_{p+1}<0$.

四、函数单调性的判定法

(A)

3.4.1. 求函数 $y=x^4-2x^2-5$ 的单调区间.

3.4.2. 求函数 $y=(x-2)^5(2x+1)^4$ 的单调区间.

证明题 3.4.3～3.4.8 中的各不等式：

3.4.3. $x-\frac{1}{2}x^2\leqslant\frac{x}{1+x}$ $(x\geqslant 1)$.

3.4.4. $x-\frac{1}{6}x^3<\sin x<x$ $(x>0)$.

3.4.5. $\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

3.4.6. $x^\alpha-\alpha x\leqslant 1-\alpha$ $(x>0, 0<\alpha<1)$.

3.4.7. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(1-x)}<1$ $(x<1, x\neq 0)$.

3.4.8. $\ln(1+x)^p\leqslant 2^{p-1}(1+x^p)$ $(x\geqslant 1, p\geqslant 1)$.

3.4.9. 命题"在 (a, b) 内若 $f'(x)<g'(x)$，则 $f(x)<g(x)$"是否正确？试说明理由.

3.4.10. 证明方程 $\tan x=x$ 在各个区间$\left(n\pi, \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 内有唯一的实根.

(B)

3.4.11. 求函数 $y=2\sin x+\cos 2x$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 的单调区间.

3.4.12. 证明下列各不等式：

(1) $e^{-x}+\sin x<1+\dfrac{x^2}{2}$ $(0<x<1)$.

(2) $e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$ $(0<x<1)$.

3.4.13. 讨论方程 $xe^x=a$ $(a>0)$ 有几个实根?

3.4.14. 试确定方程 $3x^4-4x^3-6x^2+12x-20=0$ 的实根个数和这些根所在的区间.

3.4.15. 判断方程 $e^x-|x+2|=0$ 有几个实根，并指出各个根所在的区间.

3.4.16. 设函数 $f(x)$在 $[a, +\infty)$ 上连续，当 $x>a$ 时，$f'(x)>k>0$，其中 k 为常数，又 $f(a)<0$. 证明：方程$f(x)=0$ 在$\left(a, a+\dfrac{|f(a)|}{k}\right)$内有唯一实根.

3.4.17. 设在 $[a, b]$ 上 $f''(x)\geqslant 0$. 证明函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\in(a,b],\\ f'_+(a), & x=a\end{cases}$$

在 $[a, b]$ 上是单调增加的.

3.4.18. 已知函数 $f(x)$在 $[0, +\infty)$ 上连续，在$(0, +\infty)$内可微，且 $f'(x)$在 $(0, +\infty)$ 内单调增加，$f(0)=0$. 证明：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

3.4.19. 设函数 $f(x)$在 x_0 处可导且 $f'(x_0)>0$. 问是否一定有 $\delta>0$，使函数 $f(x)$在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内单调增加?并说明理由.

(C)

3.4.20. 设有一个等差数列与一个等比数列，它们的项数相

同，各项均为正，且有相同的首项与末项. 证明：这个等差数列各项之和不小于这个等比数列各项之和.

3.4.21. 设函数 $f(x)$在 $[0,+\infty)$ 上可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，且 $f(0)\cdot f'(0)\geqslant 0$. 证明：存在一点 $\xi\in[0,+\infty)$，使 $f'(\xi)=0$.

五、函数的极值及其求法

（A）

求题 3.5.1～3.5.7 中各函数的极值：

3.5.1. $y=(x-1)^2(x-2)^3$.

3.5.2. $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2$.

3.5.3. $y=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

3.5.4. $y=\frac{x^3-3x+2}{x^2+3x+2}$.

3.5.5. $y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$.

3.5.6. $y=x^4e^{-x^2}$.

3.5.7. $y=e^x\cos x$.

（B）

3.5.8. 问常数 a、b、c、d 为何值时，函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 在 $x=0$ 处有极大值 1，在 $x=2$ 处有极小值 0.

3.5.9. 设函数 $\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加，函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，证明：$f(x)$与 $\varphi[f(x)]$具有相同的极值点.

3.5.10. 设函数 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，又 $f(x)$在 $x_0(x_0\neq 0)$处取得极值. 证明：$f(x_0)$为函数 $f(x)$的极小值.

3.5.11. 设函数 $f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)$ $(n\in\mathbb{N})$，其中 $\varphi(x)$在 $x=x_0$ 处连续且 $\varphi(x_0)\neq 0$，试讨论 $f(x)$在 x_0 处是否取得极值.

3.5.12. 求函数 $y=x^3-3ax+2$ 的极值，并问方程 $x^3-3ax+2=0$ 何时有三个不同实根？何时有唯一实根？

3.5.13. 设函数 $f(x)$在 x_0 处不可导，但有符号相反的左、右导数. 证明：函数 $f(x)$在 x_0 处必有极值.

3.5.14. 试求出在 $x=1$ 取得极大值 6，在 $x=3$ 取得极小值 2 的次数最低的多项式.

3.5.15. 设 $f(x)$为定义在$(-l,l)$上的偶函数，能否断定$x=0$是 $f(x)$的极值点？若分别附加下列条件：

(1) $f(x)$连续； (2) $f'(0)$存在；

则结论又如何？

3.5.16. 设函数 $f(x)$在 $[0,+\infty)$ 内有连续导数，$f(0)=1$，且对一切 $x>0$ 有 $|f(x)|<e^{-x}$. 证明：存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使 $f'(x_0)=-e^{-x_0}$.

3.5.17. 设 $f(x)$为偶函数，$f''(0)$存在且不为零. 证明：$x=0$ 为函数 $f(x)$的极值点.

3.5.18. 设函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处存在 n 阶导数，且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

证明：(1) 当 n 为奇数时，$f(x)$在点 x_0 处不取得极值；

(2) 当 n 为偶数时，$f(x)$在点 x_0 处取得极值，且有

(a) 当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$f(x)$在点 x_0 取得极大值；

(b) 当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$f(x)$在点 x_0 取得极小值.

3.5.19. 讨论方程 $x\ln x-a=0$ 有几个实根.

(C)

3.5.20. 证明：方程 $1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}=0$ 无实根.

3.5.21. 设函数 $f(x)$在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$. 证明：$\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geqslant 8$.

3.5.22. 命题"若连续函数 $f(x)$在 x_0 取得极大值，则 $f(x)$ 必在 x_0 的某个左邻域内单调增加，在 x_0 的某个右邻域内单调减少"是否正确？试说明理由.

六、最大值、最小值问题

(A)

求题 3.6.1～3.6.4 中各函数在所给区间上的最大值和最小值：

3.6.1. $y=x^3-3x^2-9x+30$，$[-4, 4]$.

3.6.2. $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$，$(0, 1)$，(其中 $a>0$，$b>0$).

3.6.3. $y=2\tan x-\tan^2 x$，$[0, \frac{\pi}{2}]$.

3.6.4. $y=x^x$，$[0.1, +\infty)$.

3.6.5. 有一边长为 5 cm 和 8 cm 的长方形的厚纸，在各角剪去相同的小正方形，把四边折起成一个无盖盒子，要使纸盒的容积为最大. 问剪去的小正方形的边长应为多少？

3.6.6. 设 $AB=200$ km，$\angle ABC=60°$，汽车以 80 km/h 的速度由 A 向 B 行驶，同时火车以 50 km/h 的速度由 B 向 C 行驶. 问行驶几小时后汽车与火车的距离为最短？

3.6.7. 有一直流电源 E，其内阻为 r，当负载电阻 R 等于多少时，负载所获得的功率最大？

3.6.8. 在所有过定点 $P_0(x_0, y_0)$ $(x_0>0, y_0>0)$、且截在两坐标轴正半轴间的线段中，求最短的一条线段的长.

3.6.9. 试求内接于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$而面积为最大的矩形的各边之长.

3.6.10. 求一具有体积 V 而全部表面积为最小的圆柱体的底半径 r 和高 H.

3.6.11. 一页矩形纸上印刷区域的面积为 S cm²，纸的上下边空白处各留 a cm，纸的左右边空白处各留 b cm. 问该页纸怎样裁

剪才能最节约纸张？

3.6.12. 一水渠的断面 $ABCD$ 为等腰梯形（如图 3-1），断面的面积为 S，要使得 $l=AB+BC+CD$ 最短，问断面尺寸 h 和 b 应为多少？

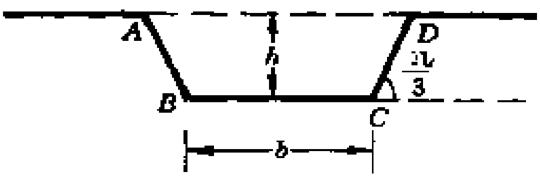


图 3-1

3.6.13. 轮船甲位于轮船乙以东 75 n mile（75 海里）处，如果轮船甲以 12 n mile/h 的速率向西行驶，而轮船乙同时以 6 n mile/h 的速率向北行驶，那末行驶多少时间后，两船相距最近？

3.6.14. 假设对某一杆件的长度进行测量，测量 n 次所得的数值分别为 x_1，x_2，…，x_n. 试问用怎样的数值 x 表示杆件的长度，才能使偏差的平方和 $(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$ 为最小？

3.6.15. 设一动点以速度 v_1 在 x 轴上运动，另一动点以速度 v_2 在 y 轴上运动，方向各与坐标轴正向相反，开始时它们的位置分别是 $(a, 0)$ 和 $(0, b)$ $(a>0, b>0)$. 求这两点间的最短距离.

3.6.16. 设有一圆桶其底部材料的单位面积价格与侧面材料的单位面积的价格之比为 3∶2. 问在容积一定的条件下，高与底圆半径之比为多少时才能使造价最省？

3.6.17. 某一变压器的铁芯截面为正十字形，正十字形面积为 $4\sqrt{5}$ cm^2. 问如何设计十字形的尺寸 y 和 x（如图 3-2），才能使正十字形外接圆的周长最短？

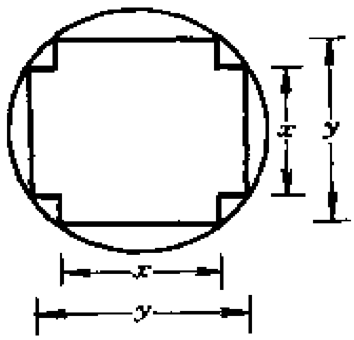


图 3-2

(B)

3.6.18. 求函数 $y=\sin^3x+\cos^3x$ 在$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$上的最大值和最小值.

3.6.19. 求函数 $y=|x^2-3x+2|$在 $[-10, 10]$ 上的最大值和最小值.

3.6.20. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

3.6.21. 要使内接于一个半径为 R 的球的圆锥体的侧面积为最大，问圆锥体的高应为多少?

3.6.22. 一 Y 形构件高为$\frac{16}{3}$ m，顶端宽为 4 m. 问下干长 a 与臂长 b 各为多少时，才能使其下干长与两臂长的和为最小?

3.6.23. 在半径为 R 的圆形广场的中央处立一灯柱，现要在柱上安装一弧光灯. 问这灯应安装多高，才能使广场周围的路上有最大的照度?（地面上某处的照度与光线投射角的余弦成正比，与该处到光源距离的平方成反比，而投射角是地面的垂线与光线的夹角）.

3.6.24. 宽为 a 的走廊与另一走廊垂直相连（如图 3-3），如果长为 $8a$ 的细杆能水平地通过拐角. 问另一走廊的宽度至少是多少?

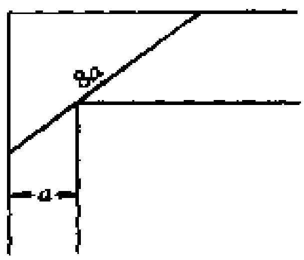


图 3-3

3.6.25. 一渔艇位于距直线海岸 9 km 处，这渔艇需派人送信到距渔艇 $6\sqrt{6}$ km 处的海岸渔站. 如果送信人步行每小时 5 km，船速 4 km/h. 问送信人应在何处登岸再步行才可使其抵达渔站的时间最省?

3.6.26. 设子弹的弹道曲线方程为

$$y=mx-\frac{(m^2+1)x^2}{800},$$

这里坐标原点取在子弹发射点，m 为弹道曲线在原点处之切线斜

率. 问

(1) m 为何值时，子弹能击中同一水平面上最远距离的目标.

(2) m 为何值时，子弹能击中 300 m（米）远处一直立墙壁上的最大高度.

3.6.27. 已知一容器由一圆筒与两个大小相同的圆锥构成，容器的表面积 $S=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi$. 且圆筒和圆锥的高度都是 h（如图 3-4）.

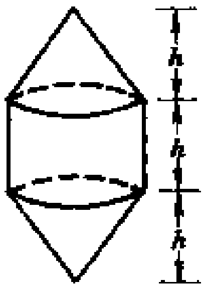


图 3-4

为使容器的容积最大，问圆筒的半径 r 和高 h 应如何选择？

3.6.28. 将长度为 l 的铁丝分两段，一段弯成一个正方形，另一段弯成一个圆周. 问两段各为多长时，才能使所得正方形与圆面积之和为最小？

3.6.29. 设射线 OP 与 OQ 分别与直线 EF 成 $\frac{\pi}{6}$ 角和 $\frac{\pi}{4}$ 角，一长度为 $2l$ 的直线段 $\overline{AB}$ 的端点 A 与 B 分别在射线 OP 与 OQ 上移动（如图 3-5）. 求线段 $\overline{AB}$ 的中点 M 到直线 EF 的距离的最大值和最小值.

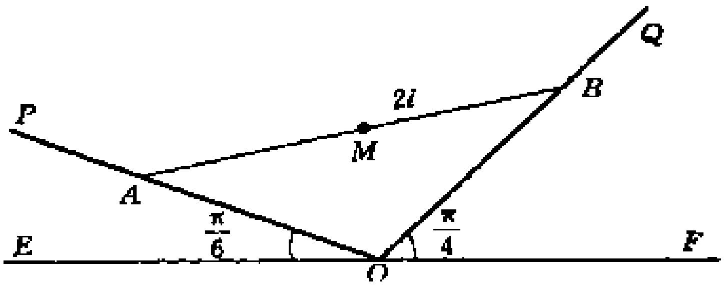


图 3-5

(C)

3.6.30. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有二阶导数，且 $|f(x)|\leqslant 1$，$|f''(x)|\leqslant 1$. 证明：$|f'(x)|\leqslant 2$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

3.6.31. 在化工生产中，反应罐内的液体化工原料排出后，在罐壁上留有 10 kg 残液，现要用一定量的水分二次放入罐内清洗，而每次清洗后总留有 10 kg 残液. 问如何分配一定量的水，才能使二次清洗后罐壁上所留的残液中含化工原料最少？

3.6.32. 作一个形如长方体的箱子，其所有棱长之和 H 及表面积 A 给定，求使箱子容积取得最大值和最小值时的各棱之长.

七、曲线的凹凸与拐点

(A)

3.7.1. 求下列各曲线在指定点邻近的凹凸性：

(1) $y=x^5-3x^3-12x^2+30$，$(1, 1)$、$(3, 3)$.

(2) $y=x^2\ln x$，$(1, 0)$、$(e^{-2}, -2e^{-4})$.

(3) $y=\arctan x$，$\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$、$\left(-1, -\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3.7.2. 求曲线 $y=x^3-3x^2+24x-19$ 在拐点处的切线方程.

求题 3.7.3～3.7.14 中各函数图形的拐点及凹或凸的区间.

3.7.3. $y=x+36x^2-2x^3-x^4$.

3.7.4. $y=\dfrac{x^3}{x^2+3a^2}$ $(a>0)$.

3.7.5. $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$ $(a>0)$.

3.7.6. $y=a-\sqrt[3]{x-b}$.

3.7.7. $y=\dfrac{a}{x}\ln\dfrac{x}{a}$ $(a>0)$.

3.7.8. $y=a-\sqrt[5]{(x-b)^2}$.　　3.7.9. $y=1-x^2$.

3.7.10. $y=(x-b)^3$.　　3.7.11. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

3.7.12. $y=\tan x$.　　3.7.13. $y=x^2e^{-x}$.

3.7.14. $y=2-|x^5-1|$.

(B)

3.7.15. 证明：若函数 $f(u)$在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加，且其图形是凹的，函数 $u=\varphi(x)$在 $(-\infty, +\infty)$ 上的图形也是凹的，则复合函数 $f[\varphi(x)]$在 $(-\infty, +\infty)$ 上的图形是凹的（其中$f(u)$、$\varphi(x)$均为二阶可导）.

3.7.16. 求函数 $y=x^2\ln(ax)$ $(a>0)$ 的拐点 M，并求当 a 变动时拐点 M 的轨迹方程.

3.7.17. 设函数 $f(x)$在 $[a, +\infty)$ 上二阶可导，且 $f(x)$在 $[a, +\infty)$ 上的图形是凸的，$f(a)=A>0$，$f'(a)<0$. 证明：

(1) $f\left(a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right)<0$;

(2) 方程 $f(x)=0$ 在 $[a, +\infty)$ 内有且仅有一实根.

3.7.18. 设 $P(x)$为具有正系数的偶次多项式，试判断曲线 $y=P(x)+ax$（a 为常数）的凹凸性，并给予证明.

八、函数图形的描绘

(A)

求题 3.8.1～3.8.7 中各曲线的渐近线：

3.8.1. $y=c+\dfrac{a^3}{(x-b)^2}$.　　3.8.2. $y=e^{\frac{1}{x}}-1$.

3.8.3. $2y(x+1)^2=x^3$.　　3.8.4. $y^3=6x^2+x^3$.

3.8.5. $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$.　　3.8.6. $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$.

3.8.7. $y=2x+\arctan\dfrac{x}{2}$.

描绘题 3.8.8～3.8.12 中各函数的图形：

3.8.8. $y=\frac{8a^3}{x^2+a^2}$.

3.8.9. $y=\frac{x}{3-x^2}$.

3.8.10. $y=3x^5-5x^3$.

3.8.11. $y=xe^{-\frac{1}{4}x^2}$.

3.8.12. $y=\frac{1}{x}e^x$.

(B)

3.8.13. 求曲线 $x^{2/3}+y^{2/3}=3axy$ 的渐近线.

描绘题 3.8.14～3.8.17 中各函数的图形：

3.8.14. $y=\ln \sin x$.

3.8.15. $y=x-2\arctan x$.

3.8.16. $y=\frac{\cos 2x}{\cos x}$.

3.8.17. $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

九、曲　　率

(A)

求题 3.9.1～3.9.5 中各曲线在指定点处的曲率：

3.9.1. 双曲线 $xy=4$，在点(2,2)处.

3.9.2. 曲线 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，在点(0,0)处.

3.9.3. 悬链线 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $(a>0)$，在点(x_0,y_0)处.

3.9.4. 箕舌线 $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ $(a>0)$，在点$(0,2a)$处.

3.9.5. 阿基米德螺线 $r=a\theta$（见附录Ⅶ(10)），在任意点(r,θ)处.

3.9.6. 求曲线$\begin{cases}x=3t^2,\\ y=3t-t^3\end{cases}$在与 $t=1$ 相应的点处的曲率半径.

(B)

3.9.7. 求曲线 $y=a\ln\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ $(a>0)$上曲率半径为最小的

点的坐标.

3.9.8. 求立方抛物线 $y=px^3(p>0)$ 在原点处的曲率，并指出曲线上曲率最大的点的位置.

3.9.9. 在上半平面内有一条向上凹的曲线 $y=y(x)$，其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q，已知曲线在点 P 处的曲率等于线段 $\overline{PQ}$ 长度的倒数，且函数 $y(x)$ 二阶可导. 证明：

$$yy''=1+y'^2.$$

3.9.10. 设函数 $f(x)$ 为二阶可导，证明曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的曲率 $K=\left|\dfrac{\mathrm{d}\sin\alpha}{\mathrm{d}x}\right|$，其中 α 是曲线在点 P 的切线的倾角.

3.9.11. 设函数 $r=r(\theta)$ 具有二阶导数. 证明：曲线 $r=r(\theta)$ 在点 (r,θ) 处的曲率：

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

3.9.12. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 在任一点 (r,θ) 处的曲率半径.

3.9.13. 求指数曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,1)$ 处的曲率圆方程.

3.9.14. 求圆的渐开线

$$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

在任一点 $(x(t),y(t))$ 处的曲率和曲率中心.

十、方程的近似解

(A)

3.10.1. 证明方程 $x^4+3x^2-x-2=0$ 只有两个单实根，且它们分别位于区间 $(-1,0)$ 及 $(0,1)$ 内，并用二分法求这两个根的近似值，使误差不超过 0.01.

3.10.2. 证明方程 $x^4+2x^2-6x+2=0$ 只有两个单实根，分别位于区间(0,1)及(1,2)内，并用切线法求这两个根的近似值，使误差不超过 0.01.

3.10.3. 求方程 $x^3-4x+2=0$ 的根的近似值，精确到 0.001.

3.10.4. 求方程 $x^5-x-0.2=0$ 含在区间(1,1.1)内的根的近似值，精确到 0.0001.

3.10.5. 求方程 $x-\tan x=0$ 含在区间$\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$内的根的近似值，精确到 0.0001.

3.10.6. 求方程 $\sin x=1-x$ 的根的近似值，精确到 0.0001.

3.10.7. 证明方程 $e^x-10x=0$ 只有两个单实根，分别位于区间(0.1,0.2)及(0.2,3.6)内，并求这两个根的近似值，要求分别精确到 0.0001 和 0.001.

十一、杂　　题

(B)

3.11.1. 设函数 $f(x)$可导，若在微分中值公式

$$f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h \quad (0<\theta<1)$$

中固定 x，问下列结论是否成立？

(1) θ 是 h 的函数；

(2) 当 h 改变时，$\theta(h)$的值必改变；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\theta=0$.

3.11.2. 设函数 $f(x)$在(a,b)内可导，α 与 β 为方程 $f(x)=0$ 的两个根，且 $a<\alpha<\beta<b$. 证明：方程 $f(x)-f'(x)=0$ 在(α,β)内至少有一个根.

3.11.3. 设函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$均在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导. 证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0,$$

并由此说明拉格朗日中值定理和柯西中值定理都是它的特例.

3.11.4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导,并有 $|f''(x)| \leqslant M$,且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值. 证明:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leqslant Ma.$$

3.11.5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶连续导数,且 $f''(x) \neq 0$. 当 $x_0, x \in (a,b)$ 且 $x_0 \neq x$ 时,有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi),$$

其中 ξ 介于 x_0、x 之间,证明当 x_0 固定时,ξ 是 x 的单值函数. 又当 $x=x_0$ 时,定义 $\xi(x_0)=x_0$,证明 $\xi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

*3.11.6. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导,且对任意 $x \in (a,+\infty)$ 有 $|f'(x)| \leqslant M$,其中 M 为常数. 证明 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上一致连续.

3.11.7. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的右邻域内具有一阶连续导数,且 $f'(0) \neq 0$,$f(0)=0$. 证明:$\lim\limits_{x \to +0} x^{f(x)} = 1$.

3.11.8. 求 $\lim\limits_{x \to +0} x^{x^x-1}$.

3.11.9. 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

3.11.10. 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$.

3.11.11. 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \dfrac{x}{2}\right)e^{1/x} - \sqrt{x^6+1}\right]$.

3.11.12. 试证明:$\ln x \leqslant \lambda(x^{\frac{1}{\lambda}} - 1) \quad (x>0, \lambda>0)$,且等号仅当 $x=1$ 时成立.

3.11.13. 求函数 $f(x) = e^{-x}\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ 的极值.

3.11.14. 问方程 $xe^{-x}=a \ (a>0)$ 有几个实根?

3.11.15. 设有底为等边三角形的直柱体，体积为 V，要使其表面积为最小，问作为底的等边三角形的边长应为多少？

3.11.16. 设有一矩形，内接于抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$)和直线 $x=a$ ($a>0$)所围成的抛物线弓形，一条边在直线 $x=a$ 上，问要使其面积为最大，它的边长应为多少？

3.11.17. 设曲线 $y=x^2+\frac{1}{4}$ 上点 M(非顶点)处的切线和法线与 Ox 轴依次相交于点 P、Q. 试问 M 在什么位置时，P、Q 两点间的距离最小？

3.11.18. 在半径为 R 的球的内接圆柱体中，求体积为最大的圆柱体的高.

3.11.19. 设变量 x、y 满足条件 $xy=100, x\geqslant\sqrt{10}, y\geqslant\sqrt{10}$. 求 $\lg^2 x\cdot\lg y$ 的最大值和最小值.

3.11.20. 有一段形状为圆台的木料，其长(即圆台的高)为 2 m，上、下底的直径分别为 0.1 m 和 0.2m. 现要在这段木料内取一横梁，其轴重合于圆台的轴，横截面为正方形，要使梁有最大的体积，问横梁应取多长？

3.11.21. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在点 $(a,0)$ 处的曲率半径和曲率中心.

*3.11.22. 证明对数螺线 $\rho=a^\theta$ 的渐屈线仍为一螺线. 又当 a 取何值时，才能使渐屈线和原来的螺线一样？

(C)

3.11.23. 试证勒让德(Legendre)多项式

$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n[(x^2-1)^n]}{\mathrm{d}x^n}$$

有 n 个零点，且都包含在 -1 与 1 之间.

3.11.24. 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对一切 x 都有

$$f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x),$$

证明:方程 $f(x)=0$ 的任何两个不同的根之间必有 $g(x)=0$ 的根.

3.11.25. 设 $f''(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,$f''(a)\neq 0$.试求

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$$

中的 θ 当 $h\to 0$ 时的极限.

3.11.26. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上具有二阶导数,且 $f'(a)=f'(b)=0$.证明:存在一点 $\xi\in(a,b)$,使

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

3.11.27. 证明:若 P_n、Q_n 分别是内接于、外切于半径为 R 的圆的正 n 边形的周长,则

$$\frac{2}{3}P_n+\frac{1}{3}Q_n>2\pi R.$$

第四章　不 定 积 分

一、不定积分的概念与性质

(A)

4.1.1. 求函数 $f(x)=5x^2$ 的通过点($\sqrt{3}$,5 $\sqrt{3}$)的积分曲线.

4.1.2. 试证函数 $F(x)=(e^x+e^{-x})^2$ 和 $G(x)=(e^x-e^{-x})^2$ 是同一函数的原函数.

4.1.3. 设一质点作匀减速直线运动,其加速度为 $a(a<0)$,初速度为 v_0,初始位置为 $s=s_0$,求质点的运动规律,并问运动了多少路程后,质点才停住.

4.1.4. 设炮弹发射的仰角为 α,初速度为 v_0,求弹道曲线的方程(不计空气阻力).

求 4.1.5~4.1.14 各题中的不定积分:

4.1.5. $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+1)\mathrm{d}x$.

4.1.6. $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$.

4.1.7. $\int\frac{3x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.　　4.1.8. $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

4.1.9. $\int\frac{2-x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.　　4.1.10. $\int\frac{1+\cos^2x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

4.1.11. $\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x$.

4.1.12. $\int(2\tan x+3\cot x)^2\mathrm{d}x$.

4.1.13. $\int b^x e^{bx}\mathrm{d}x$.

4.1.14. $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x$.

二、换元积分法

(A)

求 4.2.1～4.2.29 各题中的不定积分：

4.2.1. $\int(a+bx)^k\mathrm{d}x\ (b\neq 0)$.

4.2.2. $\int a^{mx+n}\mathrm{d}x\ (m\neq 0)$.

4.2.3. $\int\frac{1}{2+3x^2}\mathrm{d}x$.

4.2.4. $\int\frac{1}{3x^2-2}\mathrm{d}x$.

4.2.5. $\int\frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\mathrm{d}x$.

4.2.6. $\int\frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}\mathrm{d}x$.

4.2.7. $\int(2x-3)(x^2-3x+1)^{10}\mathrm{d}x$.

4.2.8. $\int\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$.

4.2.9. $\int\sin^3 x\cos^5 x\mathrm{d}x$.

4.2.10. $\int\tan^4 x\sec^4 x\mathrm{d}x$.

4.2.11. $\int\frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}\mathrm{d}x$.

4.2.12. $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}\mathrm{d}x$.

4.2.13. $\int\frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

4.2.14. $\int\frac{x^2}{x^6+4}\mathrm{d}x$.

4.2.15. $\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

4.2.16. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$.

4.2.17. $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

4.2.18. $\int\frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\mathrm{d}x$.

4.2.19. $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\mathrm{d}x$.

4.2.20. $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}\mathrm{d}x$.

4.2.21. $\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}\mathrm{d}x$.

4.2.22. $\int \frac{1}{e^{2x}-e^{-2x}}dx$.　　4.2.23. $\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}dx$.

4.2.24. $\int \frac{1}{x(\sqrt{\ln x+a}-\sqrt{\ln x+b})}dx$.

4.2.25. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.　　4.2.26. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

4.2.27. $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.　　4.2.28. $\int \sqrt{\frac{x}{4-x^3}}dx$.

4.2.29. $\int \frac{x^{\lambda}}{\sqrt{1+x^{2\lambda+2}}}dx\ (\lambda \neq -1)$.

(B)

求 4.2.30～4.2.56 各题中的不定积分：

4.2.30. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$.　　4.2.31. $\int \frac{x^{14}}{(x^5+1)^4}dx$.

4.2.32. $\int \frac{1}{x(x^n+a)}dx\ (a \neq 0)$.

4.2.33. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$.　　4.2.34. $\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$.

4.2.35. $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$.

4.2.36. $\int \tan^4 x dx$.

4.2.37. $\int (\sin x+\cos x)\cos 2x dx$.

4.2.38. $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.　　4.2.39. $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$.

4.2.40. $\int \frac{\cos x}{\sin^2(2x)}dx$.　　4.2.41. $\int \frac{1}{\sin x\cos^4 x}dx$.

4.2.42. $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin^2 x}dx$.

4.2.43. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

4.2.44. $\int \frac{1}{(x^2+2x+2)\arctan(x+1)}\mathrm{d}x$.

4.2.45. $\int \frac{1}{x^2-2x\cos\alpha+1}\mathrm{d}x \quad (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$.

4.2.46. $\int \frac{1-x}{\sqrt{x^2+4x+3}}\mathrm{d}x$.　　4.2.47. $\int \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}\mathrm{d}x$.

4.2.48. $\int \frac{3^x 5^x}{(25)^x-9^x}\mathrm{d}x$.　　4.2.49. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

4.2.50. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}\mathrm{d}x$.

4.2.51. $\int 2\mathrm{e}^x\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.　　4.2.52. $\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x$.

4.2.53. $\int \frac{1}{x}[a-\sin(\ln x)]^\lambda\cos(\ln x)\mathrm{d}x \quad (\lambda\neq -1)$.

4.2.54. $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$.

4.2.55. $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]\mathrm{d}x$.

4.2.56. $\int \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin 2x)^\lambda}\mathrm{d}x \quad (\lambda\neq\frac{1}{2})$.

三、分部积分法

(A)

求 4.3.1～4.3.12 各题中的不定积分：

4.3.1. $\int x^\lambda\ln x\mathrm{d}x \ (\lambda\neq -1)$.

4.3.2. $\int x^2\ln(1+x)\mathrm{d}x$.　　4.3.3. $\int\ln(x^2+4)\mathrm{d}x$.

4.3.4. $\int \frac{\lg x}{x^3}\mathrm{d}x$.　　4.3.5. $\int x\ln(x^2+4)\mathrm{d}x$.

4.3.6. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.　　4.3.7. $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

4.3.8. $\int \ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\mathrm{d}x$.

4.3.9. $\int x^5 e^{x^3}\mathrm{d}x$.

4.3.10. $\int x^3 \arctan x\mathrm{d}x$.

4.3.11. $\int x(\arctan x)^2\mathrm{d}x$.

4.3.12. $\int (x+\ln x)^2\mathrm{d}x$.

(B)

求 4.3.13～4.3.36 各题中的不定积分：

4.3.13. $\int e^{-x}\arctan e^x\mathrm{d}x$.

4.3.14. $\int x\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

4.3.15. $\int x^2\cos^2 x\mathrm{d}x$.

4.3.16. $\int e^{-x}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

4.3.17. $\int e^{-2x}\cos 3x\mathrm{d}x$.

4.3.18. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{3x-2}}\mathrm{d}x$.

4.3.19. $\int \frac{x^5}{\sqrt{a^3-x^3}}\mathrm{d}x$.

4.3.20. $\int \frac{(x+1)e^x}{\sqrt{a^2-e^x}}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

4.3.21. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

4.3.22. $\int x^2(2-x)^{10}\mathrm{d}x$.

4.3.23. $\int \frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

4.3.24. $\int x\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x$.

4.3.25. $\int \frac{x+\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

4.3.26. $\int e^{\sin x}\sin x\cos x\mathrm{d}x$.

4.3.27. $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

4.3.28. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

4.3.29. $\int xe^x\sin x\mathrm{d}x$.

4.3.30. $\int x\tan x\sec^4 x\mathrm{d}x$.

4.3.31. $\int \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$.

4.3.32. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\mathrm{d}x$.

4.3.33. $\int \frac{x^2e^x}{(2+x)^2}\mathrm{d}x$.

4.3.34. $\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

4.3.35. $\int\left[\frac{2}{\ln^3 x}-\frac{1}{\ln x}\right]dx$.　　4.3.36. $\int\arcsin\sqrt{1-x^2}dx$.

4.3.37. 设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，求 $\int xf''(x)dx$.

4.3.38. 设 $f(x)=xe^x$，求 $\int f'(x)\ln x dx$.

四、有理函数的积分

（A）

求 4.4.1～4.4.9 各题中的不定积分：

4.4.1. $\int\frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$.　　4.4.2. $\int\frac{x+1}{x^2+4x+13}dx$.

4.4.3. $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$.　　4.4.4. $\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.

4.4.5. $\int\frac{x^2+1}{x^2-2x+2}dx$.　　4.4.6. $\int\frac{x}{x^3-1}dx$.

4.4.7. $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$.

4.4.8. $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.　　4.4.9. $\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$.

（B）

求 4.4.10～4.4.22 各题中的不定积分：

4.4.10. $\int\frac{1}{x^4-x^2}dx$.　　4.4.11. $\int\frac{x^2}{1-x^4}dx$.

4.4.12. $\int\frac{1}{(x^2+1)(x+1)^2}dx$.

4.4.13. $\int\frac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$.

4.4.14. $\int\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$.

4.4.15. $\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\mathrm{d}x$.

4.4.16. $\int \frac{1+x^3}{x(1-x^3)}\mathrm{d}x$.　　4.4.17. $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

4.4.18. $\int \frac{1}{x(x^5+1)^2}\mathrm{d}x$.　　4.4.19. $\int \frac{x}{x^4+3x^2+2}\mathrm{d}x$.

4.4.20. $\int \frac{x}{x^8-1}\mathrm{d}x$.

4.4.21. $\int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}\mathrm{d}x$.

4.4.22. $\int \frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2}\mathrm{d}x \quad (a \neq b)$.

五、三角函数有理式的积分

(A)

求 4.5.1～4.5.9 各题中的不定积分：

4.5.1. $\int \frac{1}{4+5\cos x}\mathrm{d}x$.　　4.5.2. $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

4.5.3. $\int \frac{1}{\sin x+\tan x}\mathrm{d}x$.　　4.5.4. $\int \frac{1}{\sin x+\cos x-1}\mathrm{d}x$.

4.5.5. $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\mathrm{d}x$.　　4.5.6. $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

4.5.7. $\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

4.5.8. $\int \frac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x \quad (a>0, b>0)$.

4.5.9. $\int \frac{1}{a^2-b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x \quad (a>b>0)$.

(B)

求 4.5.10～4.5.20 各题中的不定积分：

4.5.10. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$.

4.5.11. $\int \frac{1}{a\cos x + b\sin x}\,dx$.

4.5.12. $\int \frac{\tan x}{3\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,dx$.

4.5.13. $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx$.

4.5.14. $\int \frac{\cos x}{2\sin x + \cos x}\,dx$.

4.5.15. $\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin x\cos^2 x}\,dx$.

4.5.16. $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\,dx$.

4.5.17. $\int \frac{\sin x + 8\cos x}{2\sin x + 3\cos x}\,dx$.

4.5.18. $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}\,dx$.

4.5.19. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$.

4.5.20. $\int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x\cos x}\,dx$.

六、简单无理函数的积分

(A)

求 4.6.1～4.6.5 各题中的不定积分：

4.6.1. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}\,dx$.　　4.6.2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[4]{x})^3}\,dx$.

4.6.3. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}\,dx$.

4.6.4. $\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}\,dx$.

4.6.5. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\mathrm{d}x$.

(B)

求 4.6.6～4.6.21 各题中的不定积分：

4.6.6. $\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$.

4.6.7. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$.

4.6.8. $\int \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

4.6.9. $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$.

4.6.10. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\mathrm{d}x$.

4.6.11. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}\mathrm{d}x$.

4.6.12. $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{1+x^2}}\mathrm{d}x$.　　4.6.13. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x$.

4.6.14. $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{1+x^5}}\mathrm{d}x$.　　4.6.15. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}x$.

4.6.16. $\int (x+1)\sqrt{x^2-2x-1}\mathrm{d}x$.

4.6.17. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\mathrm{d}x$.

4.6.18. $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$.

4.6.19. $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-1}}\mathrm{d}x$.

4.6.20. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}\mathrm{d}x$.

4.6.21. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} \mathrm{d}x$.

七、杂　　题

(B)

求 4.7.1～4.7.39 各题中的不定积分：

4.7.1. $\int \frac{1}{(x^2+4)^3} \mathrm{d}x$.

4.7.2. $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x$.

4.7.3. $\int \frac{x^{11}}{(1+x^8)^2} \mathrm{d}x$.

4.7.4. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} \mathrm{d}x$.

4.7.5. $\int \frac{1}{x^8(1+x^2)} \mathrm{d}x$.

4.7.6. $\int \frac{1}{x(1+x^4+x^8)} \mathrm{d}x$.

4.7.7. $\int \frac{x^4}{(x^{10}-1)^2} \mathrm{d}x$.

4.7.8. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} \mathrm{d}x$.

4.7.9. $\int \frac{1}{x(x^n+a)^2} \mathrm{d}x \quad (a \neq 0)$.

4.7.10. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^n-1}} \mathrm{d}x$.

4.7.11. $\int \frac{x^2}{x^2(x+2)^2+4x(x+2)+2} \mathrm{d}x$.

4.7.12. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} \mathrm{d}x$.

4.7.13. $\int \frac{x}{\sqrt{(4x-x^2)^3}} \mathrm{d}x$.

4.7.14. $\int \frac{1}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}} \mathrm{d}x$.

4.7.15. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}} \mathrm{d}x$.

4.7.16. $\int \frac{1}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}} \mathrm{d}x$.

4.7.17. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2} \mathrm{d}x$.

4.7.18. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \mathrm{d}x$.

4.7.19. $\int \arctan(1+\sqrt{x}) \mathrm{d}x$.

4.7.20. $\int \arcsin x \arccos x \mathrm{d}x$.

4.7.21. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x \mathrm{d}x$.

4.7.22. $\int x\arctan x \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.

4.7.23. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$.

4.7.24. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x$.

4.7.25. $\int \frac{\ln(e^x+1)}{e^x}\mathrm{d}x$.

4.7.26. $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}\mathrm{d}x$.

4.7.27. $\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)}\mathrm{d}x$.

4.7.28. $\int \frac{xe^x}{(e^x-1)^3}\mathrm{d}x$.

4.7.29. $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}\mathrm{d}x$.

4.7.30. $\int \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}\arctan e^x \mathrm{d}x$.

4.7.31. $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

4.7.32. $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

4.7.33. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\mathrm{d}x$.

4.7.34. $\int \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x$.

4.7.35. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

4.7.36. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}\mathrm{d}x$.

4.7.37. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

4.7.38. $\int \frac{\sin^2 x}{(x\cos x-\sin x)^2}\mathrm{d}x$.

4.7.39. $\int \frac{\sin^2 x e^{\sin 2x}}{e^{2x}}\mathrm{d}x$.

4.7.40. 若 $F(x)=\int \frac{x^3-a}{x-a}\mathrm{d}x$ 为 x 的多项式，试求 a 的值与 $F(x)$.

(C)

求 4.7.41～4.7.47 各题中的不定积分：

4.7.41. $\int \frac{1}{\sin x-\sin a}\mathrm{d}x$.

4.7.42. $\int \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x$.

4.7.43. $\int \frac{1}{(x+a)^2(x+b)^3}\mathrm{d}x$.

4.7.44. $\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}\mathrm{d}x$.

4.7.45. $\int \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\mathrm{d}x \quad (a<b)$.

4.7.46. $\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x \quad (a<b)$.

4.7.47. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x \quad (a<b)$.

利用欧拉代换：

(i) $a>0$ 时，令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=z\pm\sqrt{a}\,x$；

(ii) $c>0$ 时，令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$；

(iii) 令 $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$.

求 4.7.48～4.7.50 各题中的不定积分：

4.7.48. $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$.

4.7.49. $\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

4.7.50. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x(1+x)}}\mathrm{d}x$.

4.7.51. 计算 $I_1=\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x$，$I_2=\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x$.

4.7.52. 设 $f'(\sin^2 x)=\tan 2x$，求 $f(x)$.

4.7.53. 设 $F(x)$为 $f(x)$的一个原函数，当 $x\geqslant 0$ 时有

$$f(x)F(x)=\sin^2 x,$$

且 $F(0)=1, F(x)\geqslant 0$，求 $f(x)$.

第五章　定　积　分

一、定积分概念

(A)

5.1.1. 用积分和式表示抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$、直线 $x=3$、$x=6$ 和横轴所围成的曲边梯形面积的近似值，并取和式的极限求其准确值.

5.1.2. 自由落体在时刻 t 时的速度 v 等于 gt，试利用定积分的定义求落体下落 5 秒钟内所落下的距离.

5.1.3. 把质量为 m 的物体从地球表面升高到高度为 h 的位置，克服地球引力需要作功多少，试用定积分表示之（地球与物体间的引力的大小为：$f=mg\frac{R^2}{r^2}$，其中 m 表示物体的质量，R 表示地球的半径，r 表示地球中心到物体的距离）.

5.1.4. 应用定积分的定义，计算下列积分：

(1) $\int_0^1 a^x\mathrm{d}x$；　　　(2) $\int_0^T(v_0+gt)\mathrm{d}t$.

二、定积分的性质　中值定理

(A)

5.2.1. 利用定积分的几何意义，说明下列等式：

(1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\mathrm{d}x=0$； (2) $\int_{0}^{n\pi} |\sin x|\mathrm{d}x=n\int_{0}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}a^2$.

5.2.2. 不计算积分，说明下列各对积分中哪一个较大：

(1) $\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$与$\int_{0}^{1}(1+x)\mathrm{d}x$； (2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$与$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{1}^{e}(x-1)\mathrm{d}x$与$\int_{1}^{e}\ln x\mathrm{d}x$；

(4) $\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$与$\int_{0}^{1}\ln(1+x)\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\mathrm{d}x$与$\int_{0}^{1}3^{x}\mathrm{d}x$.

5.2.3. 估计下列积分的值：

(1) $\int_{1}^{4}(x^2-3x+2)\mathrm{d}x$； (2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$； (4) $\int_{0}^{2}\frac{5-x}{9-x^2}\mathrm{d}x$.

5.2.4. 证明下列不等式：

(1) $\frac{48}{5}\leqslant\int_{0}^{3}\frac{16-x^2}{5-x}\mathrm{d}x\leqslant 12$；

(2) $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\leqslant\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{2}$.

(B)

5.2.5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{1}\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

5.2.6. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上连续且不变号，证明在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使下式成立：

$$\int_{a}^{b}f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_{a}^{b}g(x)\mathrm{d}x.$$

(C)

5.2.7. 设函数 $f(x)$在 $[0,1]$ 上可微，且满足

$$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=0,$$

证明在(0,1)内至少存在一点 ξ，使 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$.

5.2.8. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $1\leqslant f(x)\leqslant 2$，证明：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{9}{8}.$$

5.2.9. 设 $f(x)$为$[0,1]$上单调减少且非负的连续函数，证明当 $0<a<b<1$ 时有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{b}{a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

5.2.10. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0$，证明在$(a,b)$内至少有两个点 x_1,x_2，使 $f(x_1)=0,f(x_2)=0$.

5.2.11. 设 $f(x)$、$g(x)$在$[0,1]$上同为单调函数，且具有相同的单调性，证明：

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

5.2.12. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，证明：

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

5.2.13. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$$

5.2.14. 设函数 $f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，证明：

(1) $\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]$

(柯西不等式)；

(2) $\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\left[\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}\right]^2$

(许瓦兹(Schwarz)不等式).

三、微积分基本公式

（A）

5.3.1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2\sin 2x}$.

5.3.2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t^2dt}{\int_x^0 t[\ln(1+t^2)]^2dt}$.

5.3.3. 设 $f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\cos t^2dt\ (x>0)$，求 $f'(x)$.

5.3.4. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，求 $y=\int_{x^2}^{e^x}f(t)dt$ 在 $x=0$ 处的导数.

5.3.5. 求由参数方程 $\begin{cases}x=\int_1^{t^2}u\ln u du,\\ y=\int_{t^2}^1 u^2\ln u du\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$的导数.

5.3.6. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可微，满足$\int_0^x f(t)dt=Af^2(x)$，$f(0)=0$，$f(1)=1$，求 $f(x)$.

5.3.7. 设 $x+y^2=\int_0^{y-x}\cos^2 tdt$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

5.3.8. 设 $F(x)=\int_5^x\left[\int_8^{y^2}\dfrac{\sin t}{t}dt\right]dy$，求 $F''(x)$.

5.3.9. 证明函数 $f(x)=\int_0^x\dfrac{3t+1}{t^2-t+1}dt$在区间$[0,1]$上单调增加.

5.3.10. 求函数 $f(x)=\int_0^x te^{-t}dt$的极值和它的图形的拐点.

计算 5.3.11～5.3.21 各题中的定积分：

5.3.11. $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$.　　5.3.12. $\int_a^b(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$.

5.3.13. $\int_1^4\frac{(1-x)^3}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.　　5.3.14. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

5.3.15. $\int_0^1\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.　　5.3.16. $\int_0^1 a^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

5.3.17. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.　　5.3.18. $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x$.

5.3.19. $\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$.　5.3.20. $\int_{-2}^4\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x$.

5.3.21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

5.3.22. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上具有二阶连续导数，它的图形在 $x=a$、$x=b$ 处的切线的倾角分别是$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{4}$，计算积分

$$\int_a^b f'(x)f''(x)\mathrm{d}x.$$

5.3.23. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上有定义，且对任意 x_1、$x_2\in[a,b]$有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)f(a)+\frac{1}{2}(b-a)^2.$$

5.3.24. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

5.3.25. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)$.

(B)

5.3.26. 求 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t}{\int_{\tan x}^0\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t}$.

5.3.27. 设 $f(x)$为连续函数，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[t\mathrm{e}^t\int_{t^2}^0 f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t}{x^4\mathrm{e}^x}.$$

5.3.28. 求 a、b 值，使

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t=1.$$

5.3.29. 设 $f''(x)$ 连续，当 $x\to 0$ 时，

$$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f''(t)\mathrm{d}t$$

的导函数与 x^2 为等价无穷小，求 $f''(0)$.

5.3.30. 设 $F(x)=\int_0^{\frac{1}{x}} xf(t)\mathrm{d}t$，其中函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，求 $F''(x)$.

5.3.31. 设 $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\mathrm{d}t$，其中 $g(x)$ 连续，且 $g(1)=5$，$\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t=2$.

(1) 证明：$f'(x)=x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t$；

(2) 求 $f''(1)$，$f'''(1)$.

5.3.32. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且对任何 x 均有 $\int_x^{x+a} f(t)\mathrm{d}t=0$，其中 a 为某个不等于零的常数，证明 $f(x)$ 为周期函数.

5.3.33. 设

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq 0,\\ C, & x=0,\end{cases}$$

其中 $f(x)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$.

(1) 试确定 C，使 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续；

(2) 当取定 C，使 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续时，问 $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否连续.

5.3.34. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)<1$，证明方程

$$2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$$

在(0,1)内只有一个根.

5.3.35. 已知

$$f(x)=\begin{cases}\int_0^x t\cos t\mathrm{d}t, & x\geqslant 0,\\ x^2, & x<0.\end{cases}$$

(1) 讨论函数 $f(x)$的连续性，写出它的连续区间；

(2) 问 $f(x)$在 $x=0$ 处是否可导. 若可导，求 $f'(0)$.

5.3.36. 设 $f(x)=\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,证明 $f(x)\equiv\frac{\pi}{4}$.

5.3.37. 求 $f(x)=\int_a^x(t^2-a^2)\mathrm{d}t$的极值，其中 $a>0$.

5.3.38. 设 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,求：

(1) $f(x)$在$(0,+\infty)$内的极大值点与极小值点；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

5.3.39. 证明：当 $x>0$ 时，

$$f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t$$

的最大值不超过$\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$,其中 $n\in\mathbb{N}$.

5.3.40. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$,证明：在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得

$$\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

5.3.41. 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上具有一阶连续导数，$\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|=M$,且 $f(a)=f(b)=0$,证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

5.3.42. 设函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上单调减少，证明对任意 $a\in(0,1)$都有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

5.3.43. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

5.3.44. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微，且

$$f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t,$$

试求 $f(x)$.

5.3.45. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<-1,\\ \dfrac{1}{2}(1-x), & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$$

求 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

5.3.46. 求 $\int_a^b x|x|\mathrm{d}x \quad (a<b)$.

5.3.47. 求 $\int_a^b x\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x \quad (a<b)$.

5.3.48. 求 $\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x$.

5.3.49. 求和：$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$.

5.3.50. 设 $f(x)=\int_{-1}^x (1-|t|)\mathrm{d}t \ (x\geqslant -1)$，求由曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

5.3.51. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微，其单值反函数为 $g(x)$，且满足 $\int_1^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(x^{3/2}-8)$. 求 $f(x)$.

5.3.52. 已知

$$\begin{cases}\varphi(x)+\int_2^x f(t)\mathrm{d}t=-(x^2+x),\\ f(x)\varphi'(x)=x^2+x-2.\end{cases}$$

求 $f(x),\varphi(x)$.

(C)

5.3.53. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$.

5.3.54. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t}{x}=\dfrac{2}{\pi}$.

5.3.55. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续、单调且非负，又

$F_1(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,F_n(x)=\int_a^x F_{n-1}(t)\mathrm{d}t\quad(n=2,3,\cdots)$,

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=0$.

5.3.56. 设函数 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$内连续、单调不减，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=c,$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c$.

5.3.57. 设函数 $f(x)$在$(-1,+\infty)$内二阶可微，$f(0)=1$，且

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0.$$

(1) 求 $f'(x)$；

(2) 证明在$[0,+\infty)$内有 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

5.3.58. 设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内连续，$f(1)=3$，且对任何 x、$y\in(0,+\infty)$满足

$$\int_1^{xy}f(t)\mathrm{d}t=y\int_1^x f(t)\mathrm{d}t+x\int_1^y f(t)\mathrm{d}t.$$

求 $f(x)$.

5.3.59. 设函数 $f(x)$二阶可微，且满足：

$$f(x)=x\mathrm{e}^x+\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t,$$

求 $f''(x)$.

5.3.60. 设 $F(x)=\int_a^b|x-y|f(y)\mathrm{d}y$，其中 $a<x<b$，$f(y)$为

连续函数，求 $F''(x)$.

5.3.61. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上有连续导数，且 $f(0)=0,0\leqslant f'(x)\leqslant 1$，证明：

$$\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^2\geqslant\int_0^1[f(t)]^3\mathrm{d}t.$$

四、定积分的换元法

(A)

计算 5.4.1～5.4.22 各题中的定积分：

5.4.1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^4x}{2}\mathrm{d}x$.

5.4.2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6x\sin 2x\mathrm{d}x$.

5.4.3. $\int_0^1\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

5.4.4. $\int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

5.4.5. $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{1}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

5.4.6. $\int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}^x+4+8\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

5.4.7. $\int_1^3\frac{1}{x+x^2}\mathrm{d}x$.

5.4.8. $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

5.4.9. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-2x^2}\mathrm{d}x$.

5.4.10. $\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x$.

5.4.11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^7 2x\mathrm{d}x$.

5.4.12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\sin x}\mathrm{d}x$.

5.4.13. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$.

5.4.14. $\int_0^{16}\frac{1}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

5.4.15. $\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{1}{(x-a)(x-2a)}\mathrm{d}x$.

5.4.16. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^4x\mathrm{d}x$.

5.4.17. $\int_1^2\frac{1}{x+x^3}\mathrm{d}x$.

5.4.18. $\int_0^1\frac{x-x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

5.4.19. $\int_0^1\sqrt{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

5.4.20. $\int_0^{-\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

5.4.21. $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.　　5.4.22. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}\mathrm{d}x$.

(B)

计算 5.4.23～5.4.35 各题中的定积分：

5.4.23. $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$.　　5.4.24. $\int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax-x^2}\mathrm{d}x$.

5.4.25. $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}}\mathrm{d}x$. 5.4.26. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2\sin^2x+\tan^2x}\mathrm{d}x$.

5.4.27. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2x\left(\sin^4x+\ln\frac{3+x}{3-x}\right)\mathrm{d}x$.

5.4.28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin(2x^2)}{1+\sin(x^2)}\mathrm{d}x$.　　5.4.29. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

5.4.30. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}\mathrm{d}x \quad (a\neq b)$.

5.4.31. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}x$.　　5.4.32. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x\cos x}{1+\cos^2 2x}\mathrm{d}x$.

5.4.33. $\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$.　　5.4.34. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$.

5.4.35. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$.

5.4.36. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, x\geqslant 0\\ \frac{1}{1+e^x}, x<0,\end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

5.4.37. 已知 $\int_a^{2\ln 2} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$，求 a.

5.4.38. 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^m x\mathrm{d}x=2^{-m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\mathrm{d}x$.

5.4.39. (1) 计算 $[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'$ 和 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$；

(2) 利用(1)的结果，比较 $\ln(1+\sqrt{2})$ 与 $\sqrt{2}-1$ 的大小.

5.4.40. 设$A_n=\int_0^1 x(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-1)]\mathrm{d}x$,

$$B_n=\int_0^1 x(x+1)(x+2)\cdots[x+(n-1)]\mathrm{d}x.$$

证明:

$$A_n=(-1)^n(B_n-nB_{n-1}),n\geqslant 2.$$

5.4.41. 设 $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t\ (x>0)$,证明:

(1) $F\left(\frac{1}{x}\right)=-F(x)\ (x>0)$;

(2) $F(xy)=F(x)+F(y)\ (x>0,y>0)$.

5.4.42. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续,证明:

$$\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

并由此计算$\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

5.4.43. 设函数 $f(x)$在$[-a,a]$上连续,证明:

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x,$$

并由此计算$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

5.4.44. 设函数 $f(x)$在$[0,2a]$上连续,证明:

$$\int_0^{2a} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a [f(x)+f(2a-x)]\mathrm{d}x,$$

并由此计算$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

5.4.45. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且在关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$对称的点处取相同的值,证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$$

5.4.46. 设函数 $f(u)$在$[0,2]$上连续,且它的图形关于点(1,0)对称,证明:

$$\int_0^\pi f(1+\cos x)\mathrm{d}x=0.$$

5.4.47. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续、可导,且

$$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t,$$

证明:

(1) 若 $f(x)$是偶函数,则 $F(x)$也是偶函数;

(2) 若 $f'(x)<0$,则 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

5.4.48. 设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,求 $f(x)$.

5.4.49. 设 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$,求 $f(x)$.

(C)

计算 5.4.50~5.4.53 各题中的定积分:

5.4.50. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$. 4.5.51. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

5.4.52. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

4.5.53. $\int_0^{2n\pi} \sqrt{1+\sin x}\mathrm{d}x \quad (n\in\mathbf{N})$.

5.4.54. 设 $f(x)=x,x>0,g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & x>\frac{\pi}{2},\end{cases}$

求 $F(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$的表达式.

5.4.55. 证明:$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$,其中 $n\in\mathbf{N}$.

5.4.56. 设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内连续,$a>0$,证明:

$$\int_1^a \frac{1}{x}f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_1^a \frac{1}{x}f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

5.4.57. 设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内连续,证明:

$$\int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\ln 2\int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

5.4.58. 设

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0,\\ 1, \quad x\leqslant 0,\end{cases}$$

求 $F(y)=\int_0^1 f(y-x)\mathrm{d}x$，其中 y 与 x 无关.

5.4.59. 已知 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$，求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

5.4.60. 求满足关系式

$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$ 的可微函数 $f(x)$.

五、定积分的分部积分法

(A)

计算 5.5.1～5.5.8 各题中的定积分：

5.5.1. $\int_0^{2\pi} x\cos^2 x\mathrm{d}x$.

5.5.2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

5.5.3. $\int_0^{\pi} x^3\sin x\mathrm{d}x$.

5.5.4. $\int_1^{e} \ln^3 x\mathrm{d}x$.

5.5.5. $\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$.

5.5.6. $\int_{2a}^{x} \ln(t+\sqrt{t^2-a^2})\mathrm{d}t \quad (a>0)$.

5.5.7. $\int_0^1 x\arctan(1-x)\mathrm{d}x$.

5.5.8. $\int_e^{2e} \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$.

(B)

计算 5.5.9～5.5.14 各题中的定积分：

5.5.9. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

5.5.10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

5.5.11. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

5.5.12. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\frac{x}{2}}(\cos x-\sin x)}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$.

5.5.13. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x \arccos x \mathrm{d}x$.

5.5.14. $\int_0^1 x^m (1-x)^n \mathrm{d}x$.

5.5.15. 计算：$I_1=\int_0^{\pi} x^2\cos^2 x\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\pi} x^2\sin^2 x\mathrm{d}x$.

5.5.16. 设 $f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

5.5.17. 设 $f(x)=\int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

5.5.18. 证明$\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x=n^2\pi \quad (n\in \mathrm{N})$.

5.5.19. 证明$\int_0^{\pi} \cos^n x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2^n} \quad (n\in \mathrm{N})$.

5.5.20. 证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n}\right)$.

六、定积分的近似计算

(A)

5.6.1. 利用梯形法公式计算下列积分的近似值，计算结果保留三位小数：

(1) $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$ (把区间 8 等分)；

(2) $\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\mathrm{d}x$ (把区间 6 等分).

5.6.2. 利用辛普森(Simpson)公式计算下列积分的近似值，计算结果保留三位小数：

(1) $\int_0^1 \frac{x}{\ln(1+x)}\mathrm{d}x$ (把区间 6 等分)；

(2) $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x$ (把区间 10 等分).

5.6.3. 把积分区间 6 等分，分别用矩形法、梯形法及辛普森公式计算积分$\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x$的近似值，计算结果保留三位小数.

5.6.4. 已知$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$，试把积分区间[0,1]分成10等分，分别用矩形法、梯形法及辛普森公式计算π的近似值，计算结果保留三位小数.

5.6.5. 根据辛普森公式，用下表所列的函数$f(x)$的值计算积分$\int_{1.05}^{1.35} f(x)dx$的近似值，计算结果保留四位小数：

x	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
$f(x)$	2.36	2.50	2.74	3.04	3.46	3.98	4.60

七、广义积分

(A)

判定5.7.1～5.7.11各题中的各广义积分的收敛性，如果收敛，则计算广义积分的值：

5.7.1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx$.

5.7.2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}dx$.

5.7.3. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx$.

5.7.4. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$.

5.7.5. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

5.7.6. $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

5.7.7. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

5.7.8. $\int_0^2 \frac{1}{x^2-4x+3}dx$.

5.7.9. $\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x}dx$.

5.7.10. $\int_1^3 \frac{x}{2-x^2}dx$.

5.7.11. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx \quad (a<0,b>0)$.

5.7.12. 利用递推公式计算广义积分$I_n=\int_0^1 \ln^n x dx$.

5.7.13. 当 k 为何值时，广义积分 $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^k}dx$ $(b>a)$ 收敛？又当 k 为何值时，这广义积分发散？

5.7.14. 当 k 为何值时，广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos bx dx$ 收敛？又当 k 为何值时，这广义积分发散？

(B)

计算 5.7.15～5.7.21 各题中的广义积分：

5.7.15. $\int_0^1 x\ln^2 x dx$.

5.7.16. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^2 x dx \quad (a>0)$.

5.7.17. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx$. 5.7.18. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$.

5.7.19. $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$.

5.7.20. $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}dx$.

5.7.21. $I_n=\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ ($n\in\mathbb{N}$，且 $n>1$).

5.7.22. 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$，求 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos x}{x}dx$ 及 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

5.7.23. 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，证明：

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}(b-a).$$

5.7.24. 已知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，

(1) 求 $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2+2x}dx$；

(2) 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}dx=\sqrt{\pi}(b-a)$.

5.7.25. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, x\leqslant 0,\\ \frac{1}{4}, 0<x\leqslant 2,\\ 0, x>2,\end{cases}$$

求 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

5.7.26. 利用递推公式计算广义积分 $I_n=\int_0^{+\infty} x^{\lambda}\ln^n x\mathrm{d}x$，其中 $\lambda>0, n\in\mathbf{N}$.

5.7.27. 利用递推公式计算广义积分 $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}\mathrm{d}x$，其中 $n\in\mathbf{N}$.

(C)

5.7.28. 求 $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x \quad (a<b)$.

5.7.29. 求 $\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x \quad (a<b)$.

5.7.30. 求 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}\mathrm{d}x$.

5.7.31. 证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

5.7.32. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且满足 $f(c+x)=f(c-x)$，其中 c 为某个常数，并设 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$. 证明：$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=c$.

*八、广义积分的审敛法

(A)

在题 5.8.1～5.8.6 中，判别各广义积分的收敛性：

5.8.1. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2-1}+10}dx$.

5.8.2. $\int_0^{+\infty}x^5e^{-\frac{x}{10}}dx$.

5.8.3. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}dx$.

5.8.4. $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx\quad(m\geqslant0,n\geqslant0)$.

5.8.5. $\int_0^1\frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$.

5.8.6. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$.

(B)

5.8.7. 如果广义积分 $\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛，证明广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛.

在题 5.8.8～5.8.13 中，判别各广义积分的收敛性：

5.8.8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}dx\ (p>0,q>0)$.

5.8.9. $\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$.

5.8.10. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx$.

5.8.11. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$.

5.8.12. $\int_{0}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]\mathrm{d}x$.

5.8.13. $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^{p}+x^{q}}\mathrm{d}x \quad (p>q)$.

第六章　定积分的应用

一、平面图形的面积

(A)

6.1.1. 求由曲线 $y=xe^{-x^2}$，横轴及直线 $x=0$，$x=1$ 所围成的图形的面积.

6.1.2. 求由抛物线$(x-1)^2=-8(y-8)$与横轴所围成的图形的面积.

6.1.3. 求由曲线 $y^2=(4-x)^3$ 与纵轴所围成的图形的面积.

6.1.4. 求三次抛物线 $y=x^3$ 与直线 $y=2x$ 所围成的图形的面积.

6.1.5. 求抛物线 $y^2=4(x+1)$与抛物线 $y^2=4(1-x)$所围成的图形的面积.

6.1.6. 求由曲线 $x+y^2-6y+8=0$ 与直线 $x-y+4=0$ 所围成的图形的面积.

6.1.7. 求由曲线 $y=\frac{1}{x+1}$与直线 $y=1,x=2$ 所围成的图形的面积.

6.1.8. 求由直线 $y=\frac{1}{2}x,y=3x,y=1,y=2$ 所围成的四边形的面积.

6.1.9. 求由抛物线 $r(1+\cos\theta)=a$ 与射线 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 所围成的图形的面积.

6.1.10. 求由双曲线 $r^2\cos 2\theta=a^2$ 与射线 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 所围成的图形的面积.

6.1.11. 圆域 $r\leqslant 1$ 被心形线 $r=1+\cos\theta$ 分割成两部分,分别求这两部分的面积.

6.1.12. 求曲线 $(x^2+y^2)^{3/2}=(x+y)^2$ 所围成的图形的面积.

(B)

6.1.13. 求由曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x=\sqrt{2y}$ 与直线 $x=\sqrt{3}$, $y=0$ 所围成的图形的面积.

6.1.14. 求由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $y=1$, $2x+y=10$ 所围成的图形的面积.

6.1.15. 求由曲线 $x^2-y^2=1$ 与直线 $x-y=1$, $x+y=2$ 所围成的图形的面积.

6.1.16. 求由曲线 $y=\sin x$ 与 $y=\sin 2x\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 所围成的图形的面积.

6.1.17. 求由 $y\geqslant 1$, $y\geqslant x$, $y\leqslant 2x$, $y\leqslant 6-x$ 所确定的四边形的面积.

6.1.18. 求三个圆域 $x^2+y^2\leqslant 4$, $(x-2)^2+y^2\leqslant 4$, $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2\leqslant 4$ 的公共部分的面积.

6.1.19. 若曲线 $y=\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴、y 轴所围成的图形被曲线 $y=a\sin x$, $y=b\sin x\,(a>b>0)$ 分成面积相等的三部分,试确定 a、b 的值.

6.1.20. 设曲线 $x^2-4y-4=0$ 与直线 $x+y-2=0$ 所围成的图形为 D,试求一条垂直于 x 轴的直线,它将 D 分成面积相等的两部分.

6.1.21. 在抛物线 $y=x^2\,(0\leqslant x\leqslant 8)$ 上求一点,使过该点的切线与直线 $y=0$, $x=8$ 所围成的图形的面积为最大.

6.1.22. 求由曲线 $y^2=x^2-x^4$ 所围成的图形的面积.

6.1.23. 求由三叶玫瑰线 $r=a\sin 3\theta$ 所围成的图形(见附录Ⅷ(16))的面积.

6.1.24. 求由伯努利双纽线 $r^2=a^2\sin 2\theta$ 所围成的图形(见附录Ⅷ(13))的面积.

6.1.25. 求由四叶玫瑰线 $r=a\cos 2\theta$ 所围成的图形(见附录Ⅷ(18))的面积.

6.1.26. 求由伯努利双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$(见附录Ⅷ(14))所围成且在圆域 $x^2+y^2\leqslant\frac{a^2}{2}$ 内的图形的面积.

6.1.27. 求介于圆 $r=4\cos\theta, r=8\cos\theta$ 及射线 $\theta=\frac{\pi}{4},\theta=\frac{\pi}{3}$ 之间的图形的面积.

6.1.28. 求两椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 及 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}\leqslant 1(a>0,b>0)$ 公共部分的面积.

6.1.29. 在曲线 $r^2=4\cos 2\theta$ 上求一点 M,使 OM 分图 6-1 中阴影部分为面积相等的两部分.

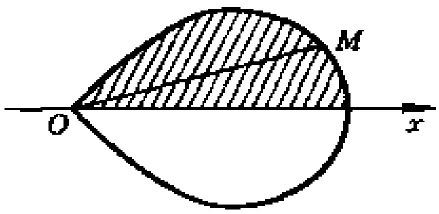


图 6-1

6.1.30. 以点 $A(a,0)$ 为起点,点 $B(b,0)(b>a>0)$ 为终点引一圈阿基米德螺线 $r=c\theta(c>0,2k\pi\leqslant\theta\leqslant 2(k+1)\pi)$. 证明:介于 $r=a,r=b$ 之间的圆环被这螺线分割成两部分的面积之比为

$$\frac{b+2a}{2b+a}.$$

6.1.31. 从原点向曲线 $y=1-\ln x$ 作切线,计算由切线、曲线和 x 轴所围成的图形的面积.

6.1.32. 求曲线 $y=\ln x(2\leqslant x\leqslant 6)$ 的一条切线,使该切线与直线 $x=2,x=6$ 及曲线 $y=\ln x$ 所围成的图形的面积为最小.

6.1.33. 求一平行于 x 轴的直线,使它与曲线 $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant 3\pi)$ 相交于四点,并使所围成的三个图形的面积之和为

最小.

(C)

6.1.34. 求介于抛物线 $x^2=a_0y,x^2=a_1y,y^2=b_0x,y^2=b_1x$ $(a_1>a_0>0,b_1>b_0>0)$之间的图形的面积.

6.1.35. 在抛物线 $y=x^2-1$ 上取一点 $P(a,a^2-1)$,过 P 引抛物线 $y=x^2$ 的两条切线,证明:两切线与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形的面积与点 P 的位置无关.

6.1.36. 设曲线 $y=f(x)$过原点及点(2,3),$f(x)$为单调函数且具有连续导数,今在曲线上任取一点,过该点作两坐标轴的平行线,设其中与 y 轴平行的一条平行线、x 轴及曲线 $y=f(x)$所围成的图形的面积为 A_1,另一条平行线、y 轴及曲线 $y=f(x)$所围成的图形的面积为 A_2,且 A_1 是 A_2 的两倍,求曲线 $y=f(x)$.

6.1.37. 设有过坐标原点的三条曲线 c_1,c_2,c_3. 已知 c_1 的方程是 $y=\frac{1}{2}x^2$,c_2 的方程是 $y=x^2$,过 c_2 上任一点 M_2,作平行于 y 轴的直线交 c_1 于 M_1,作平行于 x 轴的直线交 c_3 于 M_3(图 6-2). 如果图形 OM_2M_3 与 OM_1M_2 的面积始终保持相等,试求曲线 c_3 的方程.

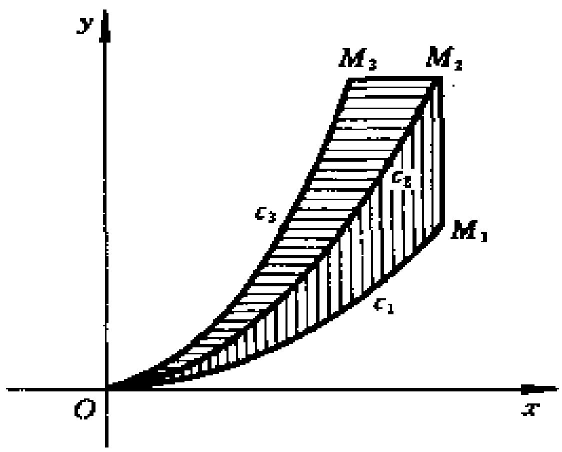


图 6-2

6.1.38. 设曲线 $y=x^2$ 与它的两条相互垂直的切线所围成的图形的面积为 S,其中一条切线与曲线相切于点 $A(a,a^2)(a>0)$,求 a 值使面积 S 最小,并求 S 的最小值.

二、体　　积

(A)

6.2.1. 求曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$与直线$x=0,y=0,y=b$所围成的在第一象限内的图形分别绕$x$轴、$y$轴旋转而成的旋转体的体积.

6.2.2. 求曲线$xy=a(a>0)$与直线$x=a,x=2a$及$y=0$所围成的图形分别绕x轴、y轴旋转而成的旋转体的体积.

6.2.3. 求曲线$y=x^2+7$与$y=3x^2+5$所围成的图形绕x轴旋转而成旋转体的体积.

6.2.4. 求心形线$r=4(1+\cos\theta)$和射线$\theta=0$及$\theta=\frac{\pi}{2}$在第一象限内所围成的图形绕极轴旋转而成的旋转体的体积.

6.2.5. 求摆线$x=a(\theta-\sin\theta),y=a(1-\cos\theta)$(见附录Ⅶ(8))的一拱与直线$y=a$所围成的图形绕直线$y=a$旋转而成的旋转体的体积.

6.2.6. 把半立方抛物线$y^2=ax^3(a>0)$(见附录Ⅶ(2))的上半支与$y=0,x=a$所围成的图形分别绕x轴及y轴旋转得到两个旋转体,问a为何值时,这两个旋转体的体积相等.

6.2.7. 设一容器,它的外表面是由抛物线$y^2=2px(0<y<H)$绕y轴旋转而成,容器内盛有高为$h(0<h<H)$的液体,问加入m个体积单位的液体后,液面升高多少?

6.2.8. 有一立体,它的底面是一个长半轴$a=10$,短半轴$b=5$的椭圆形区域,而垂直于长轴的截面都是等边三角形,求该立体的体积.

6.2.9. 有一立体以抛物线$y^2=2x$与直线$x=2$所围成的图形为底,而垂直于抛物线轴的截面都是等边三角形,求该立体的

体积.

(B)

6.2.10. 求由抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x=\frac{1}{2}$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转而成的旋转体的体积.

6.2.11. 求由抛物线 $y=x^2$，直线 $x=1$ 与 x 轴所围成的图形绕直线 $x=1$ 旋转而成的旋转体的体积.

6.2.12. 周长为 $2l$ 的等腰三角形，绕其底边旋转一周得一旋转体，求使旋转体体积最大时的那个三角形的底边的长.

6.2.13. 设曲线 $y=\sin x$、直线 $y=0$、$x=t$、$x=2t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为 $V(t)$，问 t 为何值时 V 最大.

6.2.14. 设直线 $y=ax+b$ 与直线 $x=0,x=1$ 及 $y=0$ 所围成的梯形的面积为 A，试求 a、b，使该梯形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为最小.

6.2.15. 设一容器的外表面是由 $y=Ax^2(0<y\leqslant H)$ 绕 y 轴旋转而成，容器内盛有高度为 $h\left(h<\frac{1}{2}H\right)$ 的液体，把另一个形状、大小相同的容器浸入其中，使其顶点位于 $y=a\left(\frac{1}{2}h<a<h\right)$ 处，问液面上升多少？

6.2.16. (1) 求由曲线 $y=x^2-2x+4$ 在点 $M(0,4)$ 处的切线与曲线 $y^2=2(x-1)$ 所围成的图形的面积；

(2) 求上述图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

6.2.17. 曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=\lambda x(\lambda>0)$ 相交于点 P，PA 垂直于 x 轴，垂足为 A.

(1) 曲线 $y=x^3$ 把 $\triangle OAP$ 分成两块，证明它们的面积相等；

(2) 求上述两块图形分别绕 x 轴旋转而成的两个旋转体的体积之比.

6.2.18. 设曲线$a^2y=x^2$ $(0<a<1)$将单位边长的正方形分成两部分(图 6-3). 位于正方形内曲线上侧部分为 A、曲线下侧部分为 B，A 绕 y 轴、B 绕 x 轴旋转而成的两个旋转体的体积依次为 V_A、V_B.

(1) 求 a，使 $V_A=V_B$；

(2) 求 V_A+V_B 的最小值.

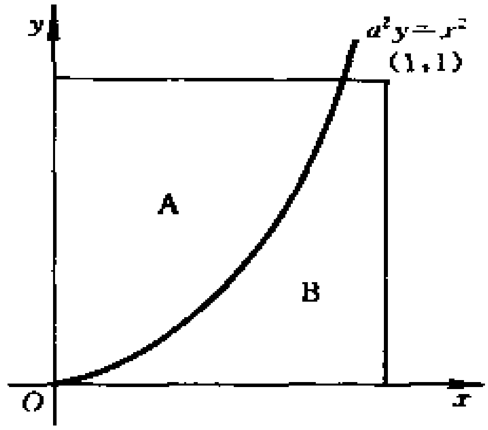


图 6-3

(C)

6.2.19. 由圆心为 O 的单位圆外的一点 $A(a,0)$，作圆的切线 AP，OA 交圆于 B(图 6-4). 将扇形 OPB 和带有阴影的图形 APB 分别绕 x 轴旋转得两个旋转体，问 a 为何值时，它们的体积相等？

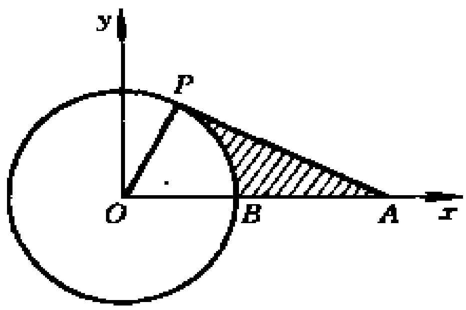


图 6-4

6.2.20. 在由椭圆域 $x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1$ 绕 y 轴旋转而成的椭球体上，以 y 轴为中心轴打一个圆孔，使剩下部分的体积恰好等于椭球体体积的一半，求圆孔的直径.

6.2.21. 设旋转体由曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$与 $x=0$，$x=a$ $(a>0)$，$y=0$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转而成，其体积为

$$V(a)=\frac{\pi}{3}a^3\left[\frac{1}{3}+\ln(a+1)\right],$$

试求 $f(x)$.

6.2.22. 已知一抛物线过三点 $A(-m,0)$、$B(0,n)$、$C(m,0)$，又 $m+n=3$，其中 $m>0$，$n>0$，如图 6-5. 要使带有阴影的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为最大，问 m、n 应等于多少？

6.2.23. 设旋转体由曲线 $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}$ $(x>0)$与 x 轴所围

成的图形绕 x 轴旋转而成，求其体积.

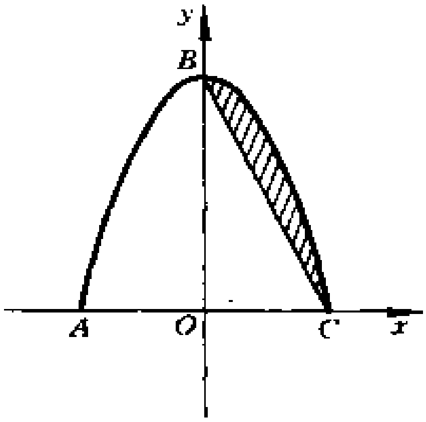


图 6-5

三、平面曲线的弧长

(A)

6.3.1. 计算曲线 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ 上相应于 $1\leqslant x\leqslant e$ 的一段弧的长度.

6.3.2. 计算曲线 $y=\ln(1-x^2)$上相应于 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$的一段弧的长度.

6.3.3. 计算曲线 $x=\arctan t, y=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$上相应于 $0\leqslant t\leqslant 1$的一段弧的长度.

6.3.4. 计算曲线 $x=e^t\sin t, y=e^t\cos t$ 上相应于 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$的一段弧的长度.

6.3.5. 证明曲线 $y=\sin x$ 上相应于 x 从 0 变到 2π 的一段弧长等于椭圆 $2x^2+y^2=2$ 的周长.

6.3.6. 一根弹簧按阿基米德螺线 $r=a\theta$(见附录Ⅷ(10))盘绕，从 $\theta=0$ 开始共绕有 10 圈，每圈间隔 10 mm，求弹簧的全长.

(B)

6.3.7. 求抛物线 $r=\dfrac{m}{1-\cos\theta}$ 上相应于 θ 从 π 至 φ 的一段弧的长度.

6.3.8. 求曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos x}\,dx$ 的全长.

6.3.9. 已知两点 $A(a,0)$,$B(0,a)$ 在星形线(见附录Ⅶ(7)) $x=a\cos^3\theta, y=a\sin^3\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上,求点 M 使 $\overset{\frown}{AM}=\dfrac{1}{4}\overset{\frown}{AB}$.

6.3.10. 求曲线 $\theta=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$ 上相应于 r 从 1 到 3 的一段弧的长度.

6.3.11. 求曲线 $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ 上相应于 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{3}a$ 的一段弧的长度.

(C)

6.3.12. 求曲线 $y=y(x)$,使曲线上两点 $(0,1)$ 及 (x,y) 之间的弧长为 $s=\sqrt{y^2-1}$.

6.3.13. 用元素法推导由光滑曲线弧段 $y=y(x)$($a\leqslant x\leqslant b$, $y(x)\geqslant0$)绕 x 轴旋转而得的旋转曲面的面积为

$$A=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

6.3.14. 设旋转体由曲线 $y^3=x^2$, $y=\sqrt{2-x^2}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转而成,求它的体积及表面积.

四、功　水压力和引力

(A)

6.4.1. 半径为 r m(米)的半球形水池,其中充满了水,把

池内的水吸尽，至少需要作多少功？

6.4.2. 有一圆台形蓄水池，深 3 m，上、下底面的半径依次为 2 m、1 m，池内盛满了水，将池内的水吸尽，至少需要作多少功？

6.4.3. 设有一弹簧长 25 cm，若施加 1 N（牛顿）拉力，则弹簧伸长到 30 cm，求使弹簧由 25 cm 伸长到 40 cm 时所作的功.

6.4.4. 一椭圆形薄板，其长半轴为 a，短半轴为 b，此薄板的一半铅直地浸入水中，其短轴与水的表面相齐，计算液体对此薄板每面的压力.

6.4.5. 一块高为 a，底为 b 的三角形薄板，铅直地沉没在水中，顶在下，底与水面相齐，试计算薄板每面所受的压力. 如果把它倒放，即使它的顶点与水面相齐，而底与水面平行，则所受的压力又如何？

6.4.6. 一个直立的高为 H，底面半径为 R 的圆柱形水桶，注满水，求圆桶侧面所受的压力.

6.4.7. 一个边长为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ m 的正方形薄板铅直地沉入水中，它最上面的一个顶点离水面 1 m，而一条对角线平行于水面，求薄板一侧所受的压力.

6.4.8. 设有一根长为 l 的金属细棒，均匀带正电，电荷密度为 ρ，在棒的延长线上而距棒近端为 s 处，置一带正电荷 q 的质点 A（q 对棒上电荷密度的影响略去不计），求质点 A 所受的斥力，并求质点 A 由 $s=a$ 处沿延长线方向移至无穷远处时斥力所作的功.

6.4.9. 计算函数 $f(x)=e^{x^2}\sin x+x^2+\cos x$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的平均值.

6.4.10. 求原点与区间 $[-4,3]$ 上的所有点之间的平均距离.

(B)

6.4.11. 设有一质量为 M、半径为 R 的均匀细圆环，在圆环

中心轴（即过圆环中心且垂直于圆环所在平面的直线）上有一质量为 m 的质点 P，距环心为 a，求圆环对质点 P 的引力，当质点从距环心 a 处沿圆环中心轴移至无穷远处时克服引力所作的功.

6.4.12. 设半径为 R 的半球形水池充满了水，现在把水从池中抽出，当抽出水所作的功为将水全部抽完所作功的一半时，水面的高度下降了多少？

6.4.13. 水坝中有一直立的矩形闸门，宽 10 m，高 6 m，闸门的上边平行于水面，试求：

(1) 当水面在闸门顶上 8 m 时，闸门所受的压力；

(2) 当闸门所受的压力为前者的 2 倍时，此时水面在闸门顶上多少米.

6.4.14. 蓄水池的一壁为矩形，宽 4 m，深 2 m，在壁上作两条水平直线把壁分成三部分，要使水池蓄满水时每一部分所受的压力都相等，问这两条直线应处在什么位置.

6.4.15. 有一边长为 $2h$ 的立方体容器盛满了水和油，油与水的体积各占一半，油与水的比重分别为 0.8γ 和 γ（γ 为单位体积水的重量），求容器的一个侧面所受的压力. 又当容器全部装油时，一个侧面的压力减少了多少？

6.4.16. 一底为 b、高为 h 的对称抛物线弓形闸门，底边在水下且平行于水面，闸门的顶点恰与水面相齐，若 $b+h=l$（l 为定值），问底和高各为何值时，闸门所受的压力为最大.

(C)

6.4.17. 有两根匀质细棒，线密度均为 ρ，一根长为 l，位于 x 轴上 $[l, 2l]$ 处，另一根长为 $2l$，位于 y 轴上 $[2l, 4l]$ 处. 在坐标原点处有一质量为 m 的质点，试求两棒对该质点的引力的合力.

6.4.18. 两根匀质细棒 AB、CD 位于同一直线 L 上，其长度依次为 $l_1=2$ 及 $l_2=1$，其线密度依次为 $\rho_1=1$ 及 $\rho_2=2$，两棒的相

邻两端点 B、C 间的距离为 3. 现有一质量为 m 的质点 P 在直线 L 上，位于 B、C 两点之间，问质点 P 应放在何处，恰使两棒对它的引力的大小相等.

6.4.19. 两根匀质细棒位于同一直线上，其长度分别为 l_1、l_2，其质量分别为 M_1、M_2，两棒的相邻两端点之间的距离为 a，求两棒之间的引力.

6.4.20. 设有面密度 ρ 的圆环形薄板，其内半径为 r_1，外半径为 r_2. 质量为 m 的质点 A 位于圆环的中心轴上，离圆环中心为 a. 求圆环对质点 A 的引力.

6.4.21. 一容器的外表面由 $y=x^2$ $(0\leqslant y\leqslant H)$ 绕 y 轴旋转而成，其容积为 $72\pi\ \mathrm{m}^3$，盛满了水，现将水吸出 $64\pi\ \mathrm{m}^3$，问至少需要作多少功?

6.4.22. 斜边为定长的直角三角形薄板，铅直放置于水中，并使一直角边与水面相齐，问三角形的一锐角为多大时，薄板所受的水压力为最大?

6.4.23. 有一半径为 R 的半圆形薄板，铅直地沉入水中，直径在上且与水面相齐，要使薄板上所受的水压力增加一倍，薄板应铅直下降多少?

6.4.24. 设有半径为 R cm 的半球形容器，现以 $30\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ 的流量往容器内注水，问：

(1) 在水深 y cm $(0<y<R)$ 时，水面上升的速率是多少?

(2) 注满容器需要多少时间?

(3) 将注满水的容器倾斜 $\dfrac{\pi}{4}$ 角度，容器内还有多少水?

第七章　空间解析几何与向量代数

一、空间直角坐标系

（A）

7.1.1. 下列各点的位置有何特征：

(1) $(-2,0,0)$；　(2) $(0,-4,0)$；　(3) $(0,0,1)$；

(4) $(0,\frac{1}{3},7)$；　(5) $(5,0,3)$；　(6) $(-1,3,0)$.

7.1.2. 已知一球面通过点 $O(0,0,0)$、$A(2,0,0)$、$B(0,3,0)$ 和 $C(0,0,6)$. 求球心的坐标及球的半径.

7.1.3. 设四面体的顶点为 $A(-7,3,-2)$、$B(0,2,1)$、$C(4,-1,0)$ 和 $D(-1,0,-3)$. 现将坐标系平移，使点 $M(6,-2,1)$ 为新原点，试求四面体各顶点在新坐标系下的坐标.

7.1.4. 试求点 $A(a,b,c)$ 到各坐标轴、坐标面的距离.

7.1.5. 满足下列条件的点在空间的位置有何特征：

(1) $x=y$；　(2) $x=y=z$.

二、向量及其加减法　向量与数的乘法

（A）

7.2.1. 设点 M 是平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点，$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、

$\boldsymbol{r}_3$、$\boldsymbol{r}_4$ 依次为点 M、A、B、C、D 的向径. 证明：

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4).$$

7.2.2. 用向量的方法证明：三角形的中位线平行底边，且它的长度等于底边长度的一半.

7.2.3. 设空间四边形 $ABCD$ 各边的中点依次为 P、Q、R、S，证明：

(1) 四边形 $PQRS$ 是平行四边形；

(2) 四边形 $PQRS$ 的周长等于四边形 $ABCD$ 的两对角线的长度之和.

7.2.4. 在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的一点，若 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，证明 D 是 BC 的中点.

7.2.5. 设 P、Q 两点的向径分别为 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$，点 R 在线段 PQ 上，且 $\frac{|PR|}{|RQ|}=\frac{m}{n}$，证明点 R 的向径为

$$\boldsymbol{r}=\frac{n\boldsymbol{r}_1+m\boldsymbol{r}_2}{m+n}.$$

7.2.6. 已知三角形 ABC 的两个顶点为 $A(-4,-1,2)$ 和 $B(3,5,-6)$，AC 边的中点在 Z 轴上，BC 边的中点在 xOy 坐标面上，求顶点 C 的坐标.

7.2.7. 设两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共起点，求与它们夹角的平分线平行的向量.

(B)

7.2.8. 证明：连接空间四边形对边中点的两线段相交且互相平分.

7.2.9. 将线段 AB 五等分，已知自 A 至 B 的第一个分点为 $C(3,-5,7)$，最后一个分点为 $F(-2,4,-8)$，求点 A、B 及其他分点的坐标.

7.2.10. 已知点 $A(2,-1,7)$ 和点 $B(4,5,-2)$，试求每个坐标面分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 之比，并求分点的坐标.

7.2.11. 设在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ DC$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{CD}$.

7.2.12. 设点 O 是点 A 和点 B 连线外的一点，证明点 C 和点 A、B 共线的充分必要条件是：

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},$$

其中 λ、μ 为实数，且 $\lambda+\mu=1$.

7.2.13. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

7.2.14. 在平行四边形 $ABCD$ 中，BC 和 CD 的中点依次为 K 和 L，设 $\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AL}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{DC}$.

7.2.15. 在正六边形 $ABCDEF$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{EF}$.

7.2.16. 设 AD、BE、CF 分别为 $\triangle ABC$ 的内角平分线，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，且 $|\boldsymbol{a}|=a$，$|\boldsymbol{b}|=b$，$|\boldsymbol{c}|=c$，证明：

$$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{b+c}(c\boldsymbol{b}-b\boldsymbol{c}),\ \overrightarrow{BE}=-\frac{1}{c+a}(a\boldsymbol{c}-c\boldsymbol{a}),$$

$$\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{a+b}(b\boldsymbol{a}-a\boldsymbol{b}).$$

7.2.17. 已知空间三点 $A(3,-1,2)$，$B(1,2,-4)$，$C(-1,1,2)$，求点 D，使以 A、B、C、D 为顶点的四边形为平行四边形.

(C)

7.2.18. 设 $ABCD$ 是空间四边形，对角线 AC 和 BD 的中点依次为 L 和 M，证明：

$$4\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}.$$

7.2.19. 设点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心，对任一点 P，证明：

(1) $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$；

(2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$.

7.2.20. 设在$\triangle ABC$中,点D和E分别在BC和CA上,且$BD=\frac{1}{3}BC$,$CE=\frac{1}{3}CA$,AD与BE相交于G,证明:

$$\overrightarrow{GD}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{GE}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BE}.$$

7.2.21. 设$\triangle ABC$的边长$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,顶点A、B、C的向径依次为$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$,内心的向径是$\boldsymbol{r}$,证明:

$$\boldsymbol{r}=\frac{a\boldsymbol{r}_1+b\boldsymbol{r}_2+c\boldsymbol{r}_3}{a+b+c}.$$

三、向量的坐标

(A)

7.3.1. 求向量$\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{2},-1)$的模、方向余弦、方向角及与$\boldsymbol{a}$同向的单位向量.

7.3.2. 已知向量$\boldsymbol{a}=(3,5,-1)$,$\boldsymbol{b}=(2,2,3)$,$\boldsymbol{c}=(4,-1,-3)$,求下列各向量的坐标:

(1) $2\boldsymbol{a}$;　　(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$;

(3) $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$;　　(4) $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$.

7.3.3. 已知点$M(2,-1,3)$是向量$\boldsymbol{a}$的终点,向量$\boldsymbol{b}=(-3,4,7)$和$\boldsymbol{c}=(0,0,5)$与$\boldsymbol{a}$满足等式$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$,求向量$\boldsymbol{a}$的起点及$\boldsymbol{a}$在各坐标轴上的投影.

7.3.4. 一向量与三坐标轴的夹角依次为α、β、γ,且$\alpha=\beta$,$\gamma=2\alpha$,试确定该向量的方向角.

7.3.5. 点M的向径与三坐标轴的夹角相等,且模为4,求点M.

7.3.6. 设向量$\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$,$\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的模相等,求坐标$z$的值.

7.3.7. 设 $\boldsymbol{F}_1=(2,3,-5)$，$\boldsymbol{F}_2=(-5,1,3)$，$\boldsymbol{F}_3=(1,-2,4)$，这三个力作用于点 $P(1,1,1)$，它们的合力为 $\boldsymbol{F}=\overrightarrow{PQ}$，求：

(1) 点 Q 的坐标；

(2) $\overrightarrow{PQ}$的大小；

(3) $\overrightarrow{PQ}$的方向余弦.

(B)

7.3.8. 从点 $A(2,-1,7)$沿向量 $\boldsymbol{a}=(8,9,-12)$方向取长为 34 的线段$\overline{AB}$，求点 B 的坐标.

7.3.9. 求与向量 $\boldsymbol{a}=(16,-15,12)$平行、方向相反，且长度为 75 的向量.

7.3.10. 点 M 的向径与 x 轴成 45°角，与 y 轴成 60°角，其长度为 6 单位. 若在 z 轴上的坐标是负值，求点 M 的坐标.

7.3.11. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,5,3)$，$\boldsymbol{b}=(6,-4,-2)$，$\boldsymbol{c}=(0,-5,7)$，$\boldsymbol{d}=(-20,27,-35)$，求数 x、y、z 使向量 $x\boldsymbol{a}$，$y\boldsymbol{b}$，$z\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{d}$ 可构成封闭折线.

7.3.12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{c}=(2,2,-1)$，$\boldsymbol{d}=(3,7,-7)$，试将其中每一个向量用其余三个向量表示.

7.3.13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,2,4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,2)$，$\boldsymbol{c}=(1,4,8)$，向量 $\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 平行，且 $|\boldsymbol{d}|=3$，求 λ、μ 和 $\boldsymbol{d}$.

7.3.14. 已知$\overrightarrow{OA}=(2,-3,6)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,2,-2)$，$AD$ 为 $\angle AOB$ 的平分线，在 AD 上求一长度为 $3\sqrt{42}$的向量.

四、数量积　向量积　*混合积

(A)

7.4.1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,0,-1)$，$\boldsymbol{b}=(3,1,4)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　　　　(2) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})$；

(3) $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$、$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$； (4) $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影.

7.4.2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,-2)$，$\boldsymbol{c}=(3,-5,4)$，求向量 $\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{d}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影.

7.4.3. 设有定点 $M_0(1,1,1)$ 及动点 $M(x,y,z)$，向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与向量 $\boldsymbol{n}=(2,2,3)$ 垂直，求动点 M 的坐标所满足的方程.

7.4.4. 求与向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$ 共线且与 $\boldsymbol{a}$ 的数量积为 3 的向量 $\boldsymbol{b}$.

7.4.5. 设 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$，其中 $|\boldsymbol{m}|=2$，$|\boldsymbol{n}|=1$，又 $(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=\frac{\pi}{2}$. 试化简表达式 $\boldsymbol{a}^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+1$.

7.4.6. 已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\sqrt{7}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

7.4.7. 设向量 $\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{n}$ 都是单位向量，$(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=\frac{\pi}{3}$，以向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$ 为边作平行四边形，求该平行四边形对角线的长度.

7.4.8. 求向量 $\boldsymbol{a}=10\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ 在向量 $\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{m}-12\boldsymbol{n}$ 上的投影，其中 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 是互相垂直的单位向量.

7.4.9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,2)$，求下列各式：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$； (2) $2\boldsymbol{b}\times 7\boldsymbol{a}$；

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{i}$； (4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{j}$；

(5) $\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

7.4.10. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，求

$$|(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|.$$

7.4.11. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=26$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=72$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

7.4.12. 已知三向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,0)$ 和 $\boldsymbol{c}=(-1,2,1)$，求：

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$； (2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

7.4.13. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，问 λ 为何值时，向量 $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{q}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线？

7.4.14. 证明：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

7.4.15. 已知四个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 满足等式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}.$$

证明向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线.

*7.4.16. 已知 $|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{c}|=3$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，求$[\boldsymbol{abc}]$.

*7.4.17. 求由 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}-3\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$ 构成的平行六面体的体积，其中 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$、和 $\boldsymbol{r}$ 是相互垂直的单位向量.

*7.4.18. 证明向量 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ 共面，其中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是任意给定的向量.

*7.4.19. 证明：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})]=2\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

*7.4.20. 已知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面.

(B)

7.4.21. 在 xOy 平面上求垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(5,-3,4)$且与它有等长的向量 $\boldsymbol{b}$.

7.4.22. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{c}=(2,1,2)$，求同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，且在向量 $\boldsymbol{c}$ 上的投影是 14 的向量 $\boldsymbol{d}$.

7.4.23. 设 $\boldsymbol{a}=(3,2,2)$，$\boldsymbol{b}=(18,-22,-5)$，求同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，模为 14，且与 y 轴成钝角的向量 $\boldsymbol{c}$.

7.4.24. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{6}$，且$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，计算向量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

7.4.25. 在三角形 ABC 中，设$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{3}$，求中线向量$\overrightarrow{CM}$与$\overrightarrow{CA}$的夹角的余弦.

7.4.26. 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{c}=(1,3,-1)$，向量 $\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共面，与 $\boldsymbol{c}$ 垂直，且$|\boldsymbol{d}|=\sqrt{6}$，求 $\boldsymbol{d}$.

7.4.27. 设 $\boldsymbol{a}=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,-4,5)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. 问 λ 为

何值时，$|\boldsymbol{c}|$最小？并证明当$|\boldsymbol{c}|$最小时，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$.

7.4.28. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_1\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}_2/\!/\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$. 证明：

$$\boldsymbol{a}_2=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}.$$

7.4.29. 证明：在过四面体同一顶点的三条边中，若有二条边分别与各自的对边垂直，则第三边也与其对边垂直.

7.4.30. 已知三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=6$，$|\boldsymbol{c}|=7$，试计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

7.4.31. 向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 两两构成$\frac{\pi}{3}$角，又$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=6$，试确定向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的长度.

7.4.32. 在直线 L 上取一单位向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{e}$，$A$、$B$ 两点关于直线 L 对称，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{e}$ 表示 b.

7.4.33. 已知平行四边形对角线向量为 $c=m+2n$ 及 $d=3m-4n$，且$|m|=1$，$|n|=2$，$(\widehat{m,n})=\frac{\pi}{6}$. 求此平行四边形的面积.

7.4.34. 已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，证明：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.$$

7.4.35. 已知单位向量$\overrightarrow{OA}$的三个方向角相等，B 是点 $M(1,-3,2)$关于点 $N(-1,2,1)$的对称点，求$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

7.4.36. 已知在 xOy 平面上的三点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，试用向量方程证明$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}|\Delta|$，其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

7.4.37. 设 A、B、C 三点的向径依次为 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$，试用 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 表示$\triangle ABC$ 的面积，并证明 A、B、C 三点共线的充分必要条件是：

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{0}.$$

7.4.38. 用向量方法证明正弦定理.

7.4.39. 设 AD 为$\triangle ABC$ 中 BC 边上的高，记$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=$

$\boldsymbol{a}$，证明：

$$S_{\triangle ABD}=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|}{2|\boldsymbol{a}|^2}.$$

7.4.40. 证明：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$.

*7.4.41. 设 A、B、C 三点不共线，它们的向径分别为 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$，证明向量 $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1$ 垂直于 A、B、C 所确定的平面.

*7.4.42. 设 L_1 和 L_2 为异面直线，L_1 经过点 M_1 且平行于向量 $\boldsymbol{s}_1$，L_2 经过点 M_2 且平行于向量 $\boldsymbol{s}_2$，证明 L_1 和 L_2 之间的距离为

$$d=\frac{|(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}.$$

*7.4.43. 证明四点 $A_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3,4)$共面的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

*7.4.44. 已知 $\boldsymbol{A}_i=x_i\boldsymbol{a}+y_i\boldsymbol{b}+z_i\boldsymbol{c}(i=1,2,3)$，其中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共面. 证明：

$$[\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3]=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}[\boldsymbol{abc}].$$

（C）

7.4.45. 设三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，证明：

$$\boldsymbol{c}=\frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \end{vmatrix}\boldsymbol{a}+\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}\boldsymbol{b}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \end{vmatrix}}.$$

7.4.46. 在平行四边形 $ABCD$ 中，DE 为 AB 边的高，记$\overrightarrow{AB}$

$=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{ED}$.

7.4.47. 若向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

7.4.48. 用向量方法证明三角形的三条高线相交于一点.

7.4.49. 用向量方法证明四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相互垂直的充分必要条件为 $|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|DA|^2$.

7.4.50. 已知三向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$为两两垂直的单位向量，证明三向量$(a_1,b_1,c_1)$，$(a_2,b_2,c_2)$，$(a_3,b_3,c_3)$也为两两垂直的单位向量.

7.4.51. 用向量方法证明关于三角形面积的海伦(Helen)公式：

$$s_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 a、b、c 为三角形的三边长，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

7.4.52. 设 $\boldsymbol{a}=(1,0,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,1)$，求满足 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 且 $|\boldsymbol{x}|$为最小时的向量 $\boldsymbol{x}$.

五、曲面及其方程

(A)

7.5.1. 已知两点 $A(5,4,0)$，$B(-4,3,4)$，点 P 满足条件 $2|PA|=|PB|$，求点 P 的轨迹方程.

7.5.2. 一动点到坐标原点的距离等于它到平面 $z-4=0$ 的距离，求它的轨迹方程.

7.5.3. 一动点到点$(0,0,5)$的距离等于它到 x 轴的距离，求它的轨迹方程.

7.5.4. 说明下列曲面是由什么曲线绕什么轴旋转而成的：

(1) $x^2+y^2+z^2=1$；　　(2) $z=2(x^2+y^2)$；

(3) $4x^2+4y^2+z^2=36$； (4) $x^2+y^2-2z^2=1$；

(5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=-1$.

7.5.5. 写出下列曲线绕指定轴旋转而成的旋转曲面的方程：

(1) xOy 面上的圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 绕 x 轴旋转；

(2) yOz 面上的双曲线 $\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 分别绕 z 轴和 y 轴旋转；

(3) zOx 面上的抛物线 $z^2=2px$ 分别绕其对称轴和过顶点的切线旋转；

(4) xOy 平面上的直线 $3x-2y+4=0$ 绕 y 轴旋转.

7.5.6. 指出下列各方程表示哪种曲面，并作出它们的图形：

(1) $x^2+y^2+z^2=1$； (2) $x^2+y^2-2x=0$；

(3) $x^2-y^2=0$； (4) $x^2+y^2=0$；

(5) $xyz=0$； (6) $y-\sqrt{3}z=0$；

(7) $y^2-4y+3=0$； (8) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$；

(9) $x^2-\frac{y^2}{9}=1$； (10) $x^2=4y$；

(11) $z^2-x^2-y^2=0$.

六、空间曲线及其方程

(A)

7.6.1. 求与点 $A(2,3,7)$，$B(3,-4,6)$ 及 $C(4,3,-2)$ 等距离的点的轨迹方程.

7.6.2. 已知点 M 到平面 $z-1=0$ 的距离等于它到 z 轴的距离的 2 倍，又点 M 到点 $A(2,-1,0)$ 的距离为 1 单位. 求点 M 的轨迹方程.

7.6.3. 化下列曲线的参数方程为一般方程：

(1) $\begin{cases} x=4\sin t, \\ y=4\cos t, \\ z=3\sin t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=a\cos^2 t, \\ y=a\sin^2 t, \\ z=\sin 2t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=t+1, \\ y=t^2, \\ z=2t+1. \end{cases}$

7.6.4. 指出下列各方程组表示什么曲线，并作出它们的图形：

(1) $\begin{cases} x+2=0, \\ y-3=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ y=2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=20, \\ z-2=0; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^2-4y^2+9z^2=36, \\ y=1; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2-4y^2=4z, \\ y=-2; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x^2-4y^2=8z, \\ z=8; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ x-y=0. \end{cases}$

7.6.5. 指出下列曲面与各坐标面交线的名称：

(1) $x^2+4y^2+16z^2=64$； (2) $x^2+4y^2-16z^2=64$；

(3) $x^2-4y^2-16z^2=64$； (4) $x^2+9y^2=10z$；

(5) $x^2-9y^2=10z$； (6) $x^2+4y^2-16z^2=0$.

7.6.6. 求曲面 $z=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}a$ 与曲面 $x^2+y^2=a^2$ 的交线在 yOz 平面上的投影方程.

7.6.7. 求空间曲线

$$\begin{cases} 6x-6y-z+16=0, \\ 2x+5y+2z+3=0 \end{cases}$$

在三坐标面上的投影方程.

7.6.8. 求通过曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 与曲面 $x^2=y^2+z^2$ 的交线，且母线平行于 z 轴的柱面方程.

(B)

7.6.9. 求空间曲线

$$\begin{cases}x+(y-1)^2+(z-1)^2=1,\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

在三坐标面上的投影方程.

7.6.10. 求球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 与柱面 $x^2+y^2-2ax=0$ $(a>0)$的交线在三坐标面上的投影方程.

7.6.11. 试把曲线方程

$$\begin{cases}2y^2+z^2+4x=4z,\\ y^2+3z^2-8x=12z\end{cases}$$

换成母线分别平行于 x 轴及 z 轴的柱面的交线的方程.

7.6.12. 设直线 L 在 yOz 平面上的投影方程为

$$\begin{cases}2x-3z=1,\\ x=0,\end{cases}$$

在 zOx 平面上的投影方程为

$$\begin{cases}x+z=2,\\ y=0.\end{cases}$$

求直线 L 在 xOy 平面上的投影方程.

七、平面及其方程

(A)

7.7.1. 确定常数 k 的值,使平面 $x+ky-2z=9$ 适合下列各条件之一:

(1) 经过点$(5,-4,-6)$;

(2) 与平面 $2x+4y+3z=3$ 垂直;

(3) 与平面 $3x-7y-6z-1=0$ 平行;

(4) 与平面 $2x-3y+z=0$ 成$\frac{\pi}{4}$的角；

(5) 与原点相距 3 个单位长度；

(6) 在 y 轴上的截距为 -3.

7.7.2. 在 y 轴上求一点，使它与两平面 $2x+3y+6z-6=0$、$8x+9y-72z+73=0$ 的距离相等.

7.7.3. 求通过点 $P(2,-1,-1)$、$Q(1,2,3)$ 且垂直于平面 $2x+3y-5z+6=0$ 的平面方程.

7.7.4. 求垂直于两平面 $x-y+z-1=0$、$2x+y+z+1=0$ 且通过点 $(1,-1,1)$ 的平面方程.

7.7.5. 求通过两点 $P(0,-1,0)$、$Q(0,0,1)$ 且与 xOy 平面成$\frac{\pi}{3}$角的平面方程.

7.7.6. 求通过 z 轴，且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$的平面方程.

7.7.7. 已知两点 $A(7,6,-4)$、$B(1,-3,-10)$，求一平面垂直有向线段$\overrightarrow{AB}$，而且分$\overrightarrow{AB}$的比为 $1:3$.

7.7.8. 一平面与三坐标面在第一卦限内围成一个四面体 $OABC$，棱 AB 在 xOy 平面上，$AB=3\sqrt{2}$，棱 BC、AC 的长均等于 5，求该平面的方程.

7.7.9. 已知一平面与向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$ 平行，且在 x 轴、y 轴上的截距依次为 3 和 -2，求其方程.

(B)

7.7.10. 一平面与原点的距离为 6，且在三坐标轴上的截距之比 $a:b:c=1:3:2$. 求该平面的方程.

7.7.11. 试推导两平行平面 $Ax+By+Cz+D_1=0$ 与 $Ax+By+Cz+D_2=0$ 之间的距离公式. 并计算平行平面 $19x-4y+8z+21=0$ 与 $19x-4y+8z+42=0$ 之间的距离.

7.7.12. 分别按下列各组条件求平面方程：

(1) 与平面 $6x+3y+2z+12=0$ 平行，且与原点的距离为单位长度；

(2) 与平面 $6x+3y+2z+12=0$ 平行，且与它相距 3 个单位长度；

(3) 与平面 $6x+3y+2z+12=0$ 平行，且使点 $(0, 2, -1)$ 与这两平面的距离相等.

7.7.13. 一平面将两平行平面 $x-2y+z-2=0$ 与 $x-2y+z-6=0$间的距离分成 1∶3，求此平面的方程.

7.7.14. 求平面 $x+2y-2z+6=0$ 和平面 $4x-y+8z-8=0$ 的交角的平分面方程.

7.7.15. 一平面与坐标面 xOy 的交线为 $x+3y-2=0$，且与三坐标面围成一个体积为$\frac{8}{3}$的四面体，求此平面的方程.

7.7.16. 一平面平行于 y 轴及向量 $\boldsymbol{a}=(-2, 1, 3)$，且在 z 轴上的截距为 $c=-5$，求此平面方程及平面在 x 轴上的截距.

7.7.17. 求一过原点的平面，使它与平面 $x-4y+8z-3=0$ 成$\frac{\pi}{4}$角，且垂直于平面 $7x+z+3=0$.

7.7.18. 设两个平面均通过点 $A(-5, 10, 12)$，其中一个平面通过 x 轴，另一个通过 y 轴，试求这两个平面的夹角.

7.7.19. 证明：通过点 $A_1(x_1, y_1, z_1)$ 和点 $A_2(x_2, y_2, z_2)$ 且垂直于 xOy 平面的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

7.7.20. 设点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 与平面 Π 的距离为 p，且平面 Π 的法向量为 (a, b, c)，证明平面 Π 的方程是

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)\pm p\sqrt{a^2+b^2+c^2}=0.$$

7.7.21. 设三个相互平行的平面 Π_1，Π_2，Π_3 的方程分别为：

$$Ax+By+Cz+D_1=0,\ Ax+By+Cz+D_2=0,$$
$$Ax+By+Cz+D_3=0.$$

问 D_1，D_2，D_3 满足什么条件才能使它们按 Π_1，Π_2，Π_3 的顺序是等间隔的.

7.7.22. 设平面方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. 证明：

(1) $\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$（其中 d 为原点到平面的距离）；

(2) 平面被三坐标面所截得的三角形的面积为

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}.$$

7.7.23. 设平面 $x+y=1$，yOz 平面及 zOx 平面为一个三棱柱面的三个侧面，过原点作一平面与三棱柱面的交线构成一个等边三角形，求此平面的方程.

7.7.24. 一平面通过点 (1，2，3)，它在正 x 轴、y 轴上的截距相等，问当平面的截距为何值时，它与三个坐标面所围成的立体的体积最小？并写出此平面的方程.

7.7.25. 设一平面通过点 P (a,b,c) 且与向径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$ 垂直，与三坐标轴的交点为 A、B、C，试证：$\triangle ABC$ 的面积为

$$S=\frac{r^5}{2|abc|},$$

其中 $r=|\boldsymbol{r}|$.

八、空间直线及其方程

(A)

7.8.1. 求满足下列各条件的直线方程：

(1) 经过点 (1，-2，3)，方向角为 $\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{4}$；

(2) 经过点 (0，-3，2) 且与连接两点 (3，4，-7)、(2，7，

-6）的线段平行；

(3) 经过点（2，0，-1）且与 x 轴平行；

(4) 经过点（2，0，-1）且垂直于 xOy 平面.

7.8.2. 分别写出满足下列各条件的直线方程：

(1) 经过点（2，-3，5）且垂直于平面 $9x-4y+2z-11=0$；

(2) 经过点（-4，5，3）且与直线$\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-1}{5}$平行；

(3) 经过点（1，1，1）且平行于直线

$$\begin{cases}2x-y-3z=0,\\x+2y-5z=1.\end{cases}$$

7.8.3. 在直线方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

中，各系数满足什么条件才能使直线分别具有下列性质：

(1) 通过坐标原点；　　(2) 与 x 轴平行；

(3) 与 y 轴相交；　　(4) 与 z 轴重合.

7.8.4. 求下列各组直线之间的夹角的余弦：

(1) $\begin{cases}x+2y+z-1=0,\\x-2y+z+1=0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x-y-z-1=0,\\x-y+2z+1=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x-y+2z+1=0,\\2x+3z-2=0\end{cases}$ 与 $\frac{x}{2}=y+1=\frac{z-3}{3}$.

7.8.5. 验证下列各组直线平行，并求它们之间的距离：

(1) $\begin{cases}x-y+z+3=0,\\x+y-3z+1=0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\2x+3y-8z+4=0;\end{cases}$

(2) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ 与 $\begin{cases}x+y-z=0,\\x-y-5z-8=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=t+1,\\y=2t-1,\\z=t\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x=t+2,\\y=2t-1,\\z=t+1.\end{cases}$

7.8.6. 求下列各直线与平面的夹角及交点：

(1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{-5}$ 与 $2x-3y+5z-8=0$.

(2) $\begin{cases}x+2y=7,\\x+y-3z=0\end{cases}$ 与 $7x+2y-3z+5=0$.

7.8.7. 求点 (3，−1，−1) 在平面 $x+2y+3z-30=0$ 上的投影.

7.8.8. 求点 (3，−1，2) 在直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0,\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 上的投影.

7.8.9. 求点 $M(1,1,1)$关于平面 $x+y-2z-6=0$ 的对称点.

7.8.10. 求点 $M(4,3,10)$关于直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$的对称点.

7.8.11. 试确定 λ 的值，使直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$和直线 $x+1=y-1=z$相交.

7.8.12. 求通过点(1，−2，5)，且同时垂直于两直线

$$\begin{cases}x+2y-3z+2=0,\\2x-3y-2z+1=0\end{cases}\quad 与 \begin{cases}3x-y-2z+5=0,\\x-y-2z+8=0\end{cases}$$

的直线方程.

7.8.13. 在 xOy 平面内，求一条过原点且与直线

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$$

垂直的直线方程.

7.8.14. 求过点(1，−2，1)且垂直于直线

$$\begin{cases}x+y-z+2=0,\\x-2y+z-3=0\end{cases}$$

的平面方程.

7.8.15. 求过点(1，2，1)且与两直线

$$\begin{cases}x-y+z-1=0,\\x+2y-z+1=0,\end{cases}\quad \frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{-1}=-z$$

都平行的平面方程.

7.8.16. 求通过直线

$$\begin{cases} x=2t+1, \\ y=-3t+2, \\ z=2t-3 \end{cases}$$

和点 $A(2,-2,1)$的平面方程.

7.8.17. 验证直线

$$\begin{cases} x=2z+1, \\ y=3z+2 \end{cases} \text{与直线} \begin{cases} 2x=2-z, \\ 3y=z+6 \end{cases}$$

相交,并写出由此两直线所决定的平面方程.

7.8.18. 验证两直线

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ y+z=-2, \end{cases} \quad \frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{1}$$

共面,并求此平面方程.

7.8.19. 证明:若直线$\begin{cases} x=mz+a, \\ y=nz+b \end{cases}$在平面 $Ax+By+Cz+D=0$内,则有

$$\begin{cases} Am+Bn+C=0, \\ Aa+Bb+D=0. \end{cases}$$

(B)

7.8.20. 求经过直线 $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4}$ 且垂直于平面 $x+4y-3z+7=0$ 的平面方程.

7.8.21. 求通过直线$\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$且平行于直线 $x=2y=3z$ 的平面方程.

7.8.22. 求通过点$(2,-1,5)$,且与直线

$$\begin{cases} 4x+y+2z=3, \\ 5x+2y+3z=2 \end{cases}$$

平行、与平面 $2x-y+z=1$ 垂直的平面方程.

7.8.23. 已知过点(1,1,1)的直线 L 与直线 $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 相交，又与直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 垂直，求 L 的方程.

7.8.24. 已知两直线

$$L_1:\begin{cases}y=3x+5,\\z=2x-3\end{cases} \text{及 } L_2:\begin{cases}y=4x-7,\\z=5x+10.\end{cases}$$

求通过点(-3,5,-9)且与 L_1,L_2 均相交的直线方程.

7.8.25. 求过点(-1,0,4)且与直线

$$\begin{cases}x+2y-z=0,\\x+2y+2z+4=0\end{cases}$$

垂直，又与平面 $3x-4y+z-10=0$ 平行的直线方程.

7.8.26. 一直线过点(2,-1,3)且与直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$ 相交，又与平面 $3x-2y+z+5=0$ 平行，求此直线方程.

7.8.27. 在平面 $x+y+z=1$ 上求一直线，使它与直线 $\begin{cases}y=1,\\z=-1\end{cases}$ 垂直相交.

7.8.28. 求直线 $L:\frac{x+2}{3}=\frac{2-y}{1}=\frac{z+1}{2}$ 在平面 $\Pi:2x+3y+3z-8=0$ 上的投影方程.

7.8.29. 已知直线 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+8}{6}=\frac{z-5}{-1}$ 和直线 $L_2:\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{6}=\frac{z+9}{-1}$ 平行，求一直线 L，使 L 和 L_1,L_2 共面，且平分 L_1,L_2 间的距离.

7.8.30. 证明直线

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-3}{1} \text{与直线} \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-3}{3}$$

相交，并求它们交角的平分线方程.

7.8.31. 一直线过点 $M(0,2,1)$，它的方向向量与三个向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,2),\boldsymbol{b}=(0,3,0),\boldsymbol{c}=(0,0,3)$ 的夹角都相等，求它的方程.

7.8.32. 求通过点 $A(2,-2,0)$且与 y 轴成$\frac{\pi}{3}$角，又与直线

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{-2}$$

相交的直线方程.

7.8.33. 一直线通过点$(2,-3,5)$，它的方向向量的三个方向角相等，求点 $P(1,-2,3)$到此直线的距离.

7.8.34. 一直线经过两直线

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{8}=\frac{z-5}{-3} \text{ 和 } \begin{cases} x=4t+3, \\ y=5t+21, \\ z=-10t-11 \end{cases}$$

的交点，且与这两直线都垂直，求它的方程.

7.8.35. 已知点 N 是点 $M(4,3,10)$关于直线

$$L: \begin{cases} 9x-2y-2z+1=0, \\ 4x-7y+4z-2=0 \end{cases}$$

的对称点，求过点 N 且平行于 L 的直线方程.

7.8.36. 求两直线

$$L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4} \text{和 } L_2: \frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{5}$$

的公垂线方程.

7.8.37. 一平面通过两直线

$$L_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-5}{1} \text{和 } L_2: \frac{x}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+1}{2}$$

的公垂线，且平行于向量 $\boldsymbol{c}=(1,0,-1)$，求此平面的方程.

7.8.38. 求两直线

$$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases} \text{与} \begin{cases} x+2y-z-2=0, \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$$

间的距离.

7.8.39. 求过直线 $L: \frac{x-1}{1}=\frac{y-12}{3}=\frac{z-9}{3}$与平面 $x+3y-5z-2=0$ 的交点且与 L 垂直的平面方程.

7.8.40. 求经过平面 $6x+4y+3z+5=0$ 和平面 $2x+y+z-2=0$ 的交线，并分别满足下列各条件的平面方程：

(1) 与原点的距离为 3 单位；

(2) 在 x 轴、y 轴上的截距相等；

(3) 与平面 $4x+y-5z-9=0$ 垂直.

7.8.41. 在平面 $2x+2y-z=1$ 上有一条过点 $(0,0,-1)$ 的直线 L，它与直线 $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{0}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，求 L 的方程.

7.8.42. 一直线与直线

$$\begin{cases}x+y-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}\text{和}\begin{cases}2x-y+z-1=0,\\x+y-z+1=0\end{cases}$$

都相交，且在平面 $x+y+z=0$ 上，求其方程.

7.8.43. 在平面 $2x-6y+3z-37=0$ 上求一点 P，使点 P 与点 $M_1(3,-7,5)$ 和点 $M_2(1,-1,1)$ 的距离之和为最小.

7.8.44. 设直线

$$L:\begin{cases}x+2z=0,\\y+z+1=0\end{cases}\text{与平面 } \Pi: x+y+z+1=0$$

的交点为 P，在平面 Π 上求过点 P 且垂直于直线 L 的直线方程.

7.8.45. 在经过直线

$$\begin{cases}2x+y-3z+2=0,\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$$

的平面中，求两个互相垂直的平面，其中一个经过点 $(4,-3,1)$.

7.8.46. 三平面 $x+y-z+2=0$，$4x-3y+z-1=0$，$2x+y-5=0$ 相交于点 P，求过 P 点且分别满足下列条件的平面方程.

(1) 经过 x 轴；

(2) 与平面 $x+y+2z=0$ 平行；

(3) 经过原点和点 $(1,3,2)$.

7.8.47. 一平面与三坐标轴分别交于 P、Q、R 三点，从原点向此平面引垂线，垂足为 H. 证明 H 是 $\triangle PQR$ 的垂心.

(C)

7.8.48. 已知三直线

$$L_1: \frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-4}{1}, L_2: \frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1},$$

$$L_3: \frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1},$$

求与 L_1 平行且与 L_2,L_3 都相交的直线方程.

7.8.49. 已知两直线 $L_1: \frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$和

$$L_2: \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}.$$

(1) 验证 L_1 与 L_2 为异面直线;

(2) 求 L_1,L_2 与它们的公垂线的交点.

7.8.50. 设 L_1 和 L_2 为异面直线,M_1、M_2 分别是 L_1、L_2 上的任意一点,证明线段 M_1M_2 的中点的轨迹是 L_1 与 L_2 的公垂线的垂直平分面.

7.8.51. 光线沿直线 $\begin{cases}x+y-3=0,\\ x+z-1=0\end{cases}$ 投射到平面 $\Pi: x+y+z+1=0$上,求这光线的反射线所在的直线方程.

7.8.52. 三坐标平面与平面 $3x-y+4z-12=0$ 的交线构成一个三角形,试求该三角形三条高线的方程和长度.

九、二 次 曲 面

(A)

7.9.1. 求与两定点 $P(c,0,0)$、$Q(-c,0,0)$的距离之和等于定值 $2a(a>c>0)$的点的轨迹.

7.9.2. 求与两定点 $P(c,0,0)$、$Q(-c,0,0)$的距离之差等于定值 $2a(c>a>0)$的点的轨迹.

7.9.3. 求与两定点 $P(c,0,0)$、$Q(-c,0,0)$的距离之比为常数 k 的点的轨迹.

7.9.4. 试求分别满足下列各条件的球面方程:

(1) 中心在 $C(3,-5,-2)$，且与平面 $2x-y-3z+11=0$ 相切；

(2) 通过三点：$A(3,1,-3)$，$B(-2,4,1)$和 $C(-5,0,0)$，中心位于平面 $2x+y-z+3=0$ 上；

(3) 中心在直线$\begin{cases}2x+4y-z-7=0,\\4x+5y+z-14=0\end{cases}$上，且通过点 $A(0,3,3)$ 和点 $B(-1,3,4)$；

(4) 通过四点：$A(1,-2,-1)$，$B(-5,10,-1)$，$C(4,1,11)$，$D(-8,-2,2)$.

7.9.5. 已知两球面

$$x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+41=0,$$

$$x^2+y^2+z^2+6x+2y-6z-10=0,$$

求以连接它们的中心的线段为直径的球面方程.

7.9.6. 分别写出曲面

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$$

在下列各平面上的截痕的方程，并指出这些截痕是什么曲线:

(1) $x=2$；　　(2) $y=0$；

(3) $y=5$；　　(4) $z=2$；

(5) $z=1$.

7.9.7. 指出下列方程表示什么曲面，并作出它们的草图：

(1) $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$；　　(2) $36x^2+9y^2-4z=36$；

(3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z$；　　(4) $x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$；

(5) $x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=0$；　　(6) $x^2+y^2-\frac{z^2}{9}=0$；

(7) $y^2+z^2-x=0$；　　(8) $x^2-y^2+2z=0$.

7.9.8. 描绘下列各组曲面所围成的立体的图形：

(1) 平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z=1$ 与三坐标面；

(2) 五个平面：$3x+y=6$，$3x+2y=12$，$x+y+z=6$，$y=0$，$z=0$；

(3) 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$，平面 $x+y=1$，三个坐标平面；

(4) 抛物柱面 $y=\sqrt{x}$，$y=2\sqrt{x}$ 和平面 $x+z=6$，$z=0$；

(5) 抛物柱面 $z=4-x^2$（在第一卦限内），平面 $2x+y=4$ 和三个坐标平面；

(6) 抛物柱面 $2y^2=x$，平面$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$ 及 $z=0$；

(7) 抛物面 $z=x^2+y^2+1$，平面 $x+y=4$ 和三个坐标平面；

(8) 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 及圆锥面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$；

(9) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$（在第一卦限内），圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 及坐标面 $y=0$，$z=0$；

(10) 两圆柱面：$x^2+y^2=r^2$ 及 $x^2+z^2=r^2$（均在第一卦限内）和三个坐标平面.

7.9.9. 求单叶双曲面$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1$ 与平面 $x-2z+3=0$ 的交线关于 xOy 面的投影柱面方程.

(B)

7.9.10. 试求与两平面 $6x-3y-2z-35=0$，$6x-3y-2z+63=0$ 相切的球面方程，其中一个切点为(5，−1，−1).

7.9.11. 试求通过点(0，−3，1)且与 xOy 平面的交线为 $\begin{cases}x^2+y^2=16,\\z=0\end{cases}$ 的球面方程.

7.9.12. 试求通过两个圆

$$\begin{cases}x^2+z^2=25,\\y=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x^2+z^2=16,\\y=3\end{cases}$$

的球面方程.

7.9.13. 将下列曲面的参数方程化成曲面的一般方程，并指出是哪种曲面：

(1) $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi; \end{cases}\quad \begin{pmatrix} 0\leqslant\varphi\leqslant\pi \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{pmatrix}$

(2) $\begin{cases} x=a\cos\varphi\cos\theta, \\ y=b\cos\varphi\sin\theta, \\ z=c\sin\varphi; \end{cases}\quad \begin{pmatrix} -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2} \\ -\pi\leqslant\theta\leqslant 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{cases} x=a(u+v), \\ y=b(u-v), \\ z=uv; \end{cases}\quad \begin{pmatrix} -\infty<u<+\infty \\ -\infty<v<+\infty \end{pmatrix}$

(4) $\begin{cases} x=u\cos v, \\ y=u\sin v, \\ z=\dfrac{u^2}{2p}. \end{cases}\quad \begin{pmatrix} -\infty<u<+\infty \\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi \end{pmatrix}$

7.9.14. 一动直线过点(1,0,0)且与 xOy 平面成 45°角，求该动直线所成的轨迹.

7.9.15. 试求半径 $r=3$ 且与平面 $x+2y+2z+3=0$ 相切于点 $A(1,1,-3)$的球面方程.

7.9.16. 试求半径为 a 且与三坐标轴相切的球面方程.

7.9.17. 试求与直线

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-6}{4}$$

切于点(1,−4,6)，又与直线

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-6}$$

切于点(4,−3,2)的球面方程.

7.9.18. 一球面通过原点 O，与三坐标轴交于 A、B、C 三点，当四面体 $OABC$ 的体积为定值 k 时，求球面中心的轨迹方程.

7.9.19. 一平面通过点(a,b,c)且与三坐标轴分别交于 A、B、

C 三点，试证通过原点及点 A、B、C 的球的中心的轨迹方程为

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2.$$

7.9.20. 求圆 $\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100,\\ 2x-2y-z+9=0\end{cases}$ 的圆心和半径.

7.9.21. 设锥面的方程为 $z=3-\sqrt{3(x^2+y^2)}$，求此锥面与平面 $z=0$ 所围的正圆锥面的内切球的球面方程.

7.9.22. 求中心在直线 $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$ 上，半径为 2 且与平面 $z-1=0$ 相切的球面方程.

7.9.23. 一平面通过球面

$$x^2+y^2+z^2=4(x-2y-2z)$$

的中心，且垂直于直线 $\begin{cases}y+z=0,\\ x=0,\end{cases}$ 求此平面与球面的交线在 xOy 坐标面上的投影曲线方程.

7.9.24. 试求直线 $\frac{x}{\alpha}=\frac{y-\beta}{0}=\frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面的方程，并按 α、β 的取值情况确定它是什么曲面.

7.9.25. 求经过平面

$$x+28y-2z+17=0$$

和平面

$$5x+8y-z+1=0$$

的交线且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切的平面方程.

7.9.26. 求平行于平面

$10x-11y-2z+3=0$ 且与球面 $(x-4)^2+y^2+(z-2)^2=225$ 相切的平面方程.

7.9.27. 求与球面 $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$ 相切于点 $A(-1,3,0)$ 的平面方程.

第八章　多元函数微分法及其应用

一、多元函数的基本概念

(A)

8.1.1. 求当 $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$、$y=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$时，函数 $z=\left[\frac{\operatorname{arccot}(x-y)}{\operatorname{arccot}(x+y)}\right]^2$的值.

8.1.2. 已知函数 $f(u,v)=v^u$，试求 $f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$.

8.1.3. 已知函数 $f(u,v,w)=u^{\frac{1}{w}}+w^{2u+v}$，试求

$$f(x+y,x-y,xy).$$

8.1.4. 试证函数 $F(x,y)=xy$ 满足关系式

$$F(ax+by,cu+dv)=acF(x,u)+bcF(y,u)+adF(x,v)+bdF(y,v).$$

8.1.5. 已知 $f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)=x^3-2xy+3y^2$,求 $f(x,y)$.

8.1.6. 已知 $f(x,y)=3x+2y$,求 $f(xy,f(x,y))$.

求 8.1.7～8.1.13 各题中的函数的定义域,并画出定义域的图形:

8.1.7. $z=\frac{3}{x+y}$.

8.1.8. $z=\ln(x-y)+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

8.1.9. $z=\sqrt{x\sin y}$.

8.1.10. $z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}+\operatorname{arcsec}(x^2+y^2)$.

8.1.11. $z=\dfrac{1}{xy}+\sqrt{\ln\dfrac{a^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-a^2}$.

8.1.12. $z=\ln[x\ln(y-x)]$.

8.1.13. 设正圆锥体母线之长为 x，其高为 y，试将正圆锥体的体积 V 表示为 x、y 的函数.

求 8.1.14～8.1.15 各题中的极限：

8.1.14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

8.1.15. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

证明 8.1.16～8.1.17 各题中的极限不存在：

8.1.16. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.　　8.1.17. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$.

指出 8.1.18～8.1.19 各题中的函数在何处间断：

8.1.18. $z=\ln|x-y|$.　　8.1.19. $z=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$.

(B)

8.1.20. 设 $f(x-y,\ln x)=\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{e^x}{e^y\ln(x^x)}$，求 $f(x,y)$.

8.1.21. 设 $z=\sqrt{x}+f(\sqrt{y}-1)$，当 $x=1$ 时，$z=y$，求函数 $f(u)$ 及 $z=z(x,y)$ 的表达式.

求 8.1.22～8.1.24 各题中的函数的定义域：

8.1.22. $z=\ln(y-x^2)+\sqrt{1-y-x^2}$.

8.1.23. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2-1}}+\sqrt{2-y^2-x}$.

8.1.24. $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

求 8.1.25～8.1.26 各题中的极限：

8.1.25. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.　　　8.1.26. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

8.1.27. 验证当$(x,y)\to(0,0)$时，函数 $z=\dfrac{x+y}{x-y}$的极限不存在.

8.1.28. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & 当\ x^2+y^2\neq0,\\ 0 & ,当\ x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明：此函数沿着过点$O(0,0)$的每一条射线$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$趋于 0 时，有

$$\lim_{\rho\to0}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=0,$$

但在点 O 处不连续.

8.1.29. 证明函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在全平面上连续.

8.1.30. 设 $f(x,y)$在区域 D 内的点 $P(a,b)$处连续，且 $f(a,b)>0$. 证明：存在点 P 的一个邻域 U，使得当$(x,y)\in U$ 时，有 $f(x,y)>0$.

(C)

判断 8.1.31～8.1.32 各题中的极限是否存在：

8.1.31. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}$.

8.1.32. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}$.

8.1.33. 设函数 $f(x,y)$在区域G 内对变量 x 是连续的，对变量 y 满足利普希茨(Lipschitz)条件

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

其中(x,y_1),(x,y_2)为 G 内任意两点，L 为常数. 证明函数 $f(x,y)$在 G 内连续.

二、偏 导 数

(A)

8.2.1. 设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f_x'(3,4)$.

8.2.2. 设 $z=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$.

8.2.3. 设 $u(x,y,z)=\sqrt{\sin^2x+\sin^2y+\sin^2z}$，

求 $u_z'\left(0,0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

8.2.4. 设 $u(x,y,z)=\ln(1+x^3+y^2+z)$，求当 $x=y=z=1$ 时，$u'_x+u'_y+u'_z$ 的值.

求 8.2.5～8.2.14 各题的函数对每一个自变量的偏导数：

8.2.5. $z=\arcsin(y\sqrt{x})$.

8.2.6. $z=\ln\sin(x-2y)$.

8.2.7. $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$.

8.2.8. $z=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}$.

8.2.9. $z=xye^{\sin(\pi xy)}$.

8.2.10. $z=\dfrac{1}{\arctan\dfrac{y}{x}}$.

8.2.11. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

8.2.12. $u=x^{y^z}$.

8.2.13. $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

8.2.14. $\rho=e^{\varphi+\theta}\cos(\varphi-\theta)$.

8.2.15. 求曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{1+x^2+y^2}\\x=1\end{cases}$，在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴的夹角.

8.2.16. 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$.

8.2.17. 设 $z=x^y$，证明 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

8.2.18. 设 $z=F\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中函数 $F(u)$ 可导. 证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

8.2.19. 设 $z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$，其中 $\varphi(u)$可导.证明

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2=xy\frac{\partial z}{\partial y}.$$

在题 8.2.20～8.2.24 中，求所给各函数的二阶偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$：

8.2.20. $z=\sin^2(ax+by)$.

8.2.21. $z=y^{\ln x}$.

8.2.22. $z=e^{xe^y}$.

8.2.23. $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

8.2.24. $z=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$.

(B)

8.2.25. 设 $z=\arctan\frac{y}{x}$.验证$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

8.2.26. 记 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明

$$\Delta(\ln r)=\frac{1}{r^2}.$$

8.2.27. 设 $u=\sin x\ \mathrm{ch}\ y\cos z$.证明 $\Delta u+u=0$.

8.2.28. 设 $u=x^3+y^3+z^3-xyz$.求 Δu.

8.2.29. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(1) 求 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$；

(2) 证明函数 $f(x,y)$在点(0,0)处不连续.

8.2.30. 问 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在点(0,0)处存在偏导数吗？在(0,0)处函数连续吗？

8.2.31. 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & 当\ x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & 当\ x^2+y^2=0. \end{cases}$

证明 $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

8.2.32. 设

$u=x-y+x^2+2xy+y^2+x^3-3x^2y-y^3+x^4-4x^2y^2+y^4$.

求$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$,$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}$,$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$.

8.2.33. 设 $u=x\ln(xy)$,求$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$.

8.2.34. 设 $u=\dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$,求$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}$.

8.2.35. 设 $u=\dfrac{x+y}{x-y}$,求$\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m\partial y^n}$.

8.2.36. 设 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^4+y^4}$,验证:$f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$,但 $f''_{xy}(x,y)$,$f''_{yx}(x,y)$在点(0,0)处不连续.

(C)

8.2.37. 设 $u=\arctan\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$,求$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

8.2.38. 设函数 $f(x,y)$对每个固定的 y 是变量 x 的连续函数,且有有界的偏导数 $f'_y(x,y)$. 试证:$f(x,y)$是变量 x、y 的二元连续函数.

三、全微分及其应用

(A)

求 8.3.1~8.3.5 各题中的函数的全微分:

8.3.1. $u=\dfrac{s+t}{s-t}$.

8.3.2. $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

8.3.3. $u=\ln(3x-2y+z)$.

8.3.4. $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

8.3.5. $z=x\ln y$.

8.3.6. 求函数 $z=x^2y^3$，当 $x=2, y=-1, \Delta x=0.02, \Delta y=-0.01$时的全增量及全微分.

8.3.7. 设函数 $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，求当 $x=1, y=1, z=1$ 时的全微分.

8.3.8. 求函数 $z=\sqrt{\frac{y}{x}}$在点(1,4)处的全微分.

8.3.9. 计算函数 $z=2x^2+3y^2$ 当 $x=10, y=8, \Delta x=0.2, \Delta y=0.3$时的 Δz 及 dz，并估计用 dz 来替代 Δz 所产生的相对误差.

(B)

*8.3.10. 计算$(10.1)^{2.03}$的近似值.

*8.3.11. 计算$\frac{(1.03)^2}{\sqrt[5]{0.98\sqrt[4]{(1.05)^3}}}$的近似值.

*8.3.12. 设有一圆柱体，它的底半径 R 由 2cm 增加到 2.05cm，其高 H 由 10cm 减到 9.8cm，试求其体积 V 变化的近似值.

*8.3.13. 扇形中心角 $\alpha=60°$，半径 $R=20$m，若将中心角增加 1°，为使扇形面积保持不变，求此扇形半径变化的近似值.

8.3.14. 试用全微分导出在极坐标系中的弧微分公式.

8.3.15. 假设 x, y 的绝对值很小，证明有下面的近似公式：

$$(1+x)^m(1+y)^n \approx 1+mx+ny.$$

8.3.16. 问函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点(0,0)处的全微分是否存在？

8.3.17. 证明：$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在点(0,0)处连续，$f_x'(0,0)$，

$f'_y(0,0)$存在，但在点$(0,0)$处全微分不存在.

8.3.18. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明：$f(x,y)$的各偏导数存在，但在点$(0,0)$的任何邻域内各偏导数无界、不连续，而$f(x,y)$在点$(0,0)$处的全微分存在.

8.3.19. 设函数$f(x,y)=|x-y|g(x,y)$，其中$g(x,y)$在点$(0,0)$的某一邻域内连续. 试问：

(1) $g(0,0)$为何值时，偏导数$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$都存在？

(2) $g(0,0)$为何值时，$f(x,y)$在点$(0,0)$处的全微分存在？

四、多元复合函数的求导法则

(A)

8.4.1. 设$z=x^2+xy+y^2$，而$x=t^2$，$y=t$，求$\dfrac{dz}{dt}$、$\dfrac{d^2z}{dt^2}$.

8.4.2. 设$z=\dfrac{y}{x}$，而$x=e^t$，$y=1-e^{2t}$，求$\dfrac{dz}{dt}$、$\dfrac{d^2z}{dt^2}$.

8.4.3. 设$z=\tan(3t+2x^2-y)$，而$x=\dfrac{1}{t}$，$y=\sqrt{t}$，求$\dfrac{dz}{dt}$.

8.4.4. 设$z=\dfrac{x^2}{y}$，而$x=u-2v$，$y=2u+v$，求$\dfrac{\partial z}{\partial u}$，$\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

8.4.5. 设$z=ue^{\frac{v}{u}}$，其中$u=x^2+y^2$，$v=xy$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

8.4.6. 设$u=(x-y)^z$，而$z=x^2+y^2$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

8.4.7. 设$u=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$，其中$f$具有一阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

8.4.8. 设 $u=f(x^2-y^2,e^{xy},\ln x)$，其中 f 具有一阶连续偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

8.4.9. 设 $u=f(x^2+y^2+z^2)$，其中 f 具有二阶连续导数，求$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

8.4.10. 设 $z=f(2x+y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8.4.11. 设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$，其中 f 具有二阶连续导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8.4.12. 设 $z=x^n\varphi\left(\frac{y}{x^2}\right)$，其中 φ 为可微函数，验证：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz.$$

8.4.13. 设 $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$，其中函数 φ、ψ 具有二阶连续导数，验证：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

8.4.14. 设 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+(x-1)y\ln x$，其中 f 是二次可微函数，证明：$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x+1)y$.

8.4.15. 设 $z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$，其中 f 为可微函数，求 $\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}$.

(B)

8.4.16. 如果一圆锥的高以每秒 10 cm 的速率减少，底半径以每秒 5 cm 的速率增加，试求高为 100 cm，底半径为 50 cm 时，其体积的变化率.

8.4.17. 若函数 $f(x,y,z)$满足 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$，则称它为 n 次齐次函数，试证可微的 n 次齐次函数满足关系式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf.$$

8.4.18. 设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 证明函数 $u=f(x^2-y^2,2xy)$ 也满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

8.4.19. 设 $u=f(\xi,\eta)$ 具有二阶连续偏导数，$\xi=x-ct,\eta=x+ct$，c 为常数. 证明关系式

$$u_{xx}-\frac{1}{c^2}u_{tt}=0,$$

可以变换成 $u_{\xi\eta}=0$.

8.4.20. 在关系式

$$u^2z_{uu}-2uvz_{uv}+v^2z_{vv}+2vz_v=0$$

中，若令 $u^2=xy,v^2=\frac{x}{y}$，则此关系式可以化成怎样的形式？

8.4.21. 设函数 $u=u(x,y)$ 可微，且当 $y=x^2$ 时，$u(x,y)=1$，$\frac{\partial u}{\partial x}=x$. 求当 $y=x^2$ 时的 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

(C)

8.4.22. 设 $u=\frac{y}{x},v=xy,w=x+y+z$，若取 u,v 为新变量，$w=w(u,v)$ 为函数，又 $w(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，试变换关系式

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

8.4.23. 设 $u=f(x,y,z),y=\varphi(x,t),t=\psi(x,z)$ 其中 f、φ、ψ 都可微，试利用全微分形式不变性，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial z}$.

8.4.24. 设函数 $u(x,y)$ 有二阶连续偏导数，且满足关系式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 及条件 $u(x,2x)=x$ 和 $u_x(x,2x)=x^2$，求 $u_{xx}(x,2x),u_{xy}(x,2x)$ 及 $u_{yy}(x,2x)$.

8.4.25. 设 $z=u(x,y)e^{ax+y}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，试求常数 a 使得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0.$$

8.4.26. 设 $u=f(x,y,z)$ 有二阶偏导数，而 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$. 证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

五、隐函数的求导法

(A)

求 8.5.1～8.5.4 各题中的 $\frac{dy}{dx}$：

8.5.1. $xy-\ln y=0$. 8.5.2. $x^3y-xy^3=a^2$.

8.5.3. $xe^y+ye^x-e^{xy}=0$. 8.5.4. $y^x=x^y$.

8.5.5. 求圆 $x^2+y^2+2x-2y=2$ 上的点，使圆在该点的切线平行于 y 轴.

求 8.5.6～8.5.8 各题中的 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial x}{\partial y}$：

8.5.6. $x^3+y^3+z^3-3axyz=0$.

8.5.7. $z^2y-xz^3-1=0$.

8.5.8. $e^{x+y}\sin(x+z)=0$.

8.5.9. 设 $xyz=a^3$. 证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-2z$.

8.5.10. 证明由方程 $x-mz=\varphi(y-nz)$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足 $m\frac{\partial z}{\partial x}+n\frac{\partial z}{\partial y}=1$（其中 m、n 为常数，φ 为可微函数）.

8.5.11. 设 $x=x(y,z,u)$，$y=y(x,z,u)$，$z=z(x,y,u)$，$u=u(x,y,z)$ 都是由方程 $F(x,y,z,u)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数. 证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}=1.$$

8.5.12. 设 $y=\tan(x+y)$，验证：

$$y'''=-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}.$$

8.5.13. 设 $x^2+y^2+z^2=4z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

8.5.14. 设 $z^3-2xz+y=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

8.5.15. 求由方程 $2xz-2xyz+\ln(xyz)=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的全微分.

(B)

8.5.16. 设 u,v 是 x,y 的函数，且

$$\begin{cases} xu-yv=0, \\ yu+xv=1, \end{cases}$$

求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

8.5.17. 设 u,v 是 x,y 的函数，且

$$\begin{cases} u+v=x+y, \\ \dfrac{\sin u}{\sin v}=\dfrac{x}{y}. \end{cases}$$

求 $\mathrm{d}u$ 及 $\mathrm{d}v$.

8.5.18. 设 $F(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $F_y\neq 0$，证明由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的二阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{F_{xx}(F_y)^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}(F_x)^2}{(F_y)^3}.$$

8.5.19. 设 $F(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，$F_y\neq 0$，证明曲线 $F(x,y)=0$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径为

$$R=\left|\frac{[(F_x)^2+(F_y)^2]^{3/2}}{F_{xx}(F_y)^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}(F_x)^2}\right|.$$

8.5.20. 设 $F(u,v)$具有一阶连续偏导数，且 $F'_v \neq 0$，证明方程 $F(xy,z-2x)=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$满足关系式

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=2x.$$

8.5.21. 设 $u=f(x,z)$，而 $z=z(x,y)$是由方程 $z=x+y\varphi(z)$ 所确定的函数，其中 f 具有连续偏导数，而 φ 具有连续导数，求 $\mathrm{d}u$.

8.5.22. 证明方程 $ax+by+cz=F(x^2+y^2+z^2)$（F 是可微函数）所确定的函数 $z=z(x,y)$满足关系式

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

8.5.23. 设函数 $z=z(x,y)$由方程 $F\left(\frac{x+z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所确定，其中 F 具有连续偏导数，证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

8.5.24. 设函数 $u=f(x,y,z)$由方程 $u^2+z^2+y^2-x=0$ 所确定，其中 $z=xy^2+y\ln y-y$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$及$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

8.5.25. 设 $u=\frac{x+z}{y+z}$，其中 z 是由方程 $z\mathrm{e}^z=x\mathrm{e}^x+y\mathrm{e}^y$ 所确定的函数，求$\frac{\partial u}{\partial x}$及$\frac{\partial u}{\partial y}$.

8.5.26. 设方程 $x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$，$z=\omega(u,v)$确定 z 为 x,y 的函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

(C)

8.5.27. 证明：由方程组$\begin{cases} z=ax+\dfrac{y}{a}+f(a), \\ 0=x-\dfrac{y}{a^2}+f'(a) \end{cases}$所给出的函数 $z=z(x,y)$满足$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=1$，其中 f 可导，$a=a(x,y)$具有偏导数，

且 $a\neq 0$.

8.5.28. 证明由方程组

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha), \\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha) \end{cases}$$

所确定的函数 $z=z(x,y)$满足关系式

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2,$$

其中 $\alpha=\alpha(x,y)$具有偏导数,$f(\alpha)$为可微函数.

8.5.29. 若 u,v 是由方程组

$$\begin{cases} x=u\cos\dfrac{v}{u}, \\ y=u\sin\dfrac{v}{u} \end{cases}$$

所确定的 x,y 的反函数,求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x}$及$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

六、微分法在几何上的应用

(A)

8.6.1. 求曲线 $x=\dfrac{t^4}{4},y=\dfrac{t^3}{3},z=\dfrac{t^2}{2}$在相应于 $t=1$ 的点处的切线方程.

8.6.2. 求曲线 $x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt$ 在相应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$的点处的切线与法平面的方程.

8.6.3. 求曲线 $x=\dfrac{t^4}{4},y=\dfrac{t^3}{3},z=\dfrac{t^2}{2}$的切线方程,该切线平行于平面 $x+3y+2z=0$.

8.6.4. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4a^2, \\ x^2+y^2=2ax \end{cases}$在点$(a,a,\sqrt{2}a)$处的切线及法平面的方程.

8.6.5. 求曲线 $x=2t, y=t^2-2, z=1-t^2$ 对应于 $t=0$ 及 $t=2$ 两点间的一段弧的长度.

8.6.6. 证明:曲线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ 的切线与 z 轴成定角.

8.6.7. 求曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 在点$(3,1,1)$处的切平面与法线方程.

8.6.8. 证明:曲面 $z=x+f(y-z)$的所有切平面恒与一定直线平行(其中函数 f 可导).

8.6.9. 求曲面 $z=ax^2+by^2$ 在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面与法线方程.

8.6.10. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面方程,该切平面平行于平面 $x+4y+6z=0$.

8.6.11. 证明:球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上任一点(x_0, y_0, z_0)处的法线必通过球心.

(B)

8.6.12. 证明:曲面 $x^2+y^2+z^2-xz=1$ 的切平面不平行于直线

$$\begin{cases} x+y+z+5=0, \\ x+2y+z-8=0. \end{cases}$$

8.6.13. 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 在点$(-1,-2,3)$处的交角(即交点处两个切平面的夹角).

8.6.14. 确定正数 λ,使曲面 $xyz=\lambda$ 与曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在某点相切.

8.6.15. 证明:两光滑曲面 $F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0$ 在其交点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处正交的条件为

$$(F_x)_{M_0}(G_x)_{M_0}+(F_y)_{M_0}(G_y)_{M_0}+(F_z)_{M_0}(G_z)_{M_0}=0,$$

并验证曲面 $x^2+y^2+z^2=ax$ 与曲面 $x^2+y^2+z^2=by$ 正交.

8.6.16. 证明：锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的任一切平面均经过其顶点.

8.6.17. 证明：曲线 $x=ae^t\cos t, y=ae^t\sin t, z=ae^t$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的母线的交角为定值(即曲线上任一点的切线与锥面的母线的交角为定值).

(C)

8.6.18. 求曲面 $x=u+v, y=u^2+v^2, z=u^3+v^3$ 在对应于 $u=1, v=-1$ 的点处的切平面方程.

8.6.19. 设 $F(u,v)$ 具有一阶连续偏导数，a,b,c 为非零常数. 证明：曲面 $F(ax+bz, by+cz)=0$ 的任一切平面都平行于某一固定直线.

8.6.20. 求曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 过直线

$$\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$$

的切平面的方程.

8.6.21. 证明：曲面 $xyz=a^3(a>0)$ 的切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为一常数.

七、方向导数与梯度

(A)

8.7.1. 设从 x 轴的正向到 l 的转角为 135°，求函数 $z=3x^4+xy+y^3$ 在点 $M(1,2)$ 处沿 l 方向的方向导数.

8.7.2. 求函数 $u=xy+z^3-xyz$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿三个方向角分别为 30°，90°，60°的方向的方向导数.

8.7.3. 求函数 $u=xy+yz+xz$ 在点 $P(1,2,3)$ 处沿 P 点的向径方向的方向导数.

(B)

8.7.4. 求函数 $z=2x^2+y^2$ 在点 $P(1,1)$处的梯度以及沿梯度方向的方向导数.

8.7.5. 设从 x 轴的正向到$\overrightarrow{PM}$的转角为$\frac{\pi}{4}$,求函数 $z=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$在点 $P(1,2)$处的梯度及该梯度在$\overrightarrow{PM}$上的投影.

8.7.6. 设从 x 轴的正向到 l 的转角为 θ,求函数 $u=x^2-xy+y^2$ 在点 $M(1,1)$处沿 l 方向的方向导数$\frac{\partial u}{\partial l}$,并问 θ 取何值时,方向导数$\frac{\partial u}{\partial l}$:(1)有最大值;(2)有最小值;(3)等于零.

8.7.7. 设函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x,y)$处可微,从 x 轴的正向到向量 $\boldsymbol{l}$ 的转角为 θ,从 x 轴的正向到向量 $\boldsymbol{m}$ 的转角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$,求证:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial l}-\sin\theta\frac{\partial f}{\partial m},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial f}{\partial l}+\cos\theta\frac{\partial f}{\partial m}.$$

8.7.8. 求函数 $u=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xyz}$在点 $P(-1,3,-3)$处的梯度以及沿曲线 $x=-t^2,y=3t^2,z=-3t^3$ 在点 P 参数增大的切线方向的方向导数.

8.7.9. 设函数 $u=\ln\frac{1}{r}$,其中

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}.$$

试讨论在空间哪些点处等式$|\mathbf{grad}\ u|=1$ 成立.

8.7.10. 求函数 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$在已知点 $P(x,y,z)$处沿此点的向径 $\boldsymbol{r}$ 的方向导数,并问在怎样情况下函数 u 沿此方向的方向导数等于它的梯度的模?

八、多元函数的极值及其求法

(A)

求 8.8.1～8.8.4 各题中所给函数的极值：

8.8.1. $f(x,y)=x^2-(y-1)^2$.

8.8.2. $f(x,y)=3axy-x^3-y^3(a>0)$.

8.8.3. $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x-y+1$.

8.8.4. $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ $(0\leqslant x,y\leqslant\frac{\pi}{2})$.

8.8.5. 求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$的极值.

求 8.8.6～8.8.7 各题中所给函数在指定条件下的极值：

8.8.6. $z=x^2+y^2$,其中$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

8.8.7. $u=x-2y+2z$,其中 $x^2+y^2+z^2=1$.

8.8.8. 证明：函数 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$在原点的两个偏导数都不存在，但函数在原点有极大值.

(B)

8.8.9. 在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中，求面积为最大的三角形.

8.8.10. 在对角线之长为 d 的所有长方体中，求有最大体积的长方体的棱长.

8.8.11. 设平面四边形的边长 a、b、c、d 为定值，试问该四边形的内角在什么情况下四边形的面积有最大值.

8.8.12. 证明：函数 $z=4-ye^{\cos x}-y^2$ 有无穷多个极大值，但没有极小值.

8.8.13. 验证函数 $f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2)$在沿过原点的

任何一条直线上有极小值，但函数在原点不取得极值.

8.8.14. 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 之间的距离.

8.8.15. 在旋转椭球面$\dfrac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ 上求距平面 $3x+4y+12z=288$ 最近和最远的点.

8.8.16. 在过点$(2,1,\dfrac{1}{3})$的所有平面中，哪一个平面与三坐标面在第一卦限内围成的立体体积最小？

8.8.17. 在平面上求一点，使它到 n 个定点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots$，(x_n,y_n)的距离的平方和最小.

8.8.18. 已知两条光滑的平面曲线 C_1：$f(x,y)=0$ 及 C_2：$\varphi(x,y)=0$，又点 $P(\alpha,\beta)\in C_1$，点 $Q(\xi,\eta)\in C_2$，且 P，Q 都不是曲线的端点. 试证：如果这两点是两曲线上相距最近或最远的点，则下列关系式必成立：

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f_x(\alpha,\beta)}{f_y(\alpha,\beta)}=\frac{\varphi_x(\xi,\eta)}{\varphi_y(\xi,\eta)}$$

(即 PQ 为 C_1，C_2 的公法线).

*九、二元函数的泰勒公式

(A)

8.9.1. 求函数 $f(x,y)=e^x\cos y$ 的二阶麦克劳林公式，并写出余项.

8.9.2. 求函数 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$ 的二阶麦克劳林公式.

8.9.3. 求函数 $\arctan\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$的二阶麦克劳林公式.

8.9.4. 求函数 $f(x,y,z)=\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z$ 的二阶麦克劳林公式.

8.9.5. 求函数 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$的 n 阶麦克劳林公式，

并写出余项.

(B)

8.9.6. 求函数 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的三阶泰勒公式.

8.9.7. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所确定,且 $z(1,1)=1$,求 $z(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶泰勒公式.

*十、最小二乘法

(A)

8.10.1. 已知两变量 x 和 y 之间具有某一线性关系 $y=ax+b$. 试用最小二乘法,由 x,y 的 n 组测量值 $x_i,y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 确定出系数 a,b 的值.

8.10.2. 在平面上已知 n 个点 $M_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$,问直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ 处在什么样的位置时,这 n 个点与此直线的偏差的平方和为最小?

十一、杂　题

(A)

8.11.1. 若 $f(x,y)=\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$,证明:

(1) 对于任何 k,有 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}f(x,y)=0$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

8.11.2. 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$,求 $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$.

8.11.3. 设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$，$f(x_0,y_0)=C$（其中 C 为常数）. 证明方程 $f(x,y)=C$ 表示一条通过点 (x_0,y_0) 的直线的充要条件是

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

8.11.4. 设 $u=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中 φ 与 ψ 具有二阶连续导数，试求 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

8.11.5. 设方程 $f\left(\frac{z}{x},\frac{y}{z}\right)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，且 f 具有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

8.11.6. 已知函数 $z=f(u)$ 有一阶连续导数，而函数 $u=u(x,y)$ 由方程

$$u=\varphi(u)+\int_y^x\psi(t)\mathrm{d}t$$

所确定，其中 $\varphi(u)$ 有连续导数，$\varphi'(u)\neq 1$，且 $\psi(t)$ 连续. 证明：

$$\psi(x)\frac{\partial z}{\partial y}+\psi(y)\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

8.11.7. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z=f(x+y+z)$ 所确定的函数，其中函数 f 二次可微，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

8.11.8. 已知 $x^2y^2+x^2+y^2=1$，证明

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}}=0\quad(xy>0).$$

8.11.9. 设对任意的 x,y 有 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，用变量代换

$$\begin{cases}x=uv,\\ y=\frac{1}{2}(u^2-v^2),\end{cases}$$

将函数 $f(x,y)$ 变换成函数 $g(u,v)$，试求满足关系式

$$a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$$

中的常数 a 和 b.

8.11.10. 设 $u=f(x,y)$，$v=g(x,y)$ 为已知可微函数，且 $f_y\neq0$，$f_xg_y-f_yg_x\neq0$，试用 f_x，f_y，g_x，g_y 表示

(1) $\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_x$；(2) $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_u$；(3) $\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u$

(其中符号 $\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_x$ 表示 x 固定时 v 对 u 的偏导数，其它两个类似).

8.11.11. 设二元函数 $F(\xi,\eta)$ 的两个偏导数 F'_1、F'_2 不同时为零，$u(x,y)$ 满足 $F\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$，且 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数. 证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2.$$

8.11.12. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的通过直线 l：$\frac{x-6}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{2z-1}{-2}$ 的切平面.

8.11.13. 设 $\boldsymbol{n}$ 是闭曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的外法线向量，求函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数.

8.11.14. 设 $u=u(x,y,z)$，证明：**grad** u 为常向量的充分必要条件是 u 为线性函数 $u=ax+by+cz+d$ (a,b,c,d 均为常数).

8.11.15. 求数量场 $u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $A(1,2,2)$ 及点 $B(-3,1,0)$ 处的两个梯度之间的夹角.

8.11.16. 已知三角形三顶点坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，试在该三角形内求一点使其到三个顶点的距离的平方和为最小.

8.11.17. 求函数 $u=\ln x+\ln y+3\ln z$ 在 $x^2+y^2+z^2=5r^2$

$(x>0,y>0,z>0)$上的极大值，并以此结果证明：对于任意三个正数 a,b,c，有

$$abc^3\leqslant 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

8.11.18. 设函数 $u=\cos^2(xy)+\frac{y}{z^2}$，直线$\begin{cases}\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}z=1,\\ y-2z+4=0\end{cases}$在平面 $x+y-z=5$ 上的投影为 l，并规定 l 的正向与 z 轴的夹角为锐角，试求函数 u 在点 $P(0,0,1)$处沿直线 l 正向的方向导数.

8.11.19. 求椭球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在坐标面 zOx 上的投影区域的边界曲线方程.

8.11.20. 函数 $f(x,y)$在区域 D 内恒为常数的充分必要条件是：在 D 内$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$.

(C)

8.11.21. 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

8.11.22. 证明：若函数 $f(x,y)$的两个偏导数在点(x_0,y_0)的某一邻域内都存在且有界，则 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续.

8.11.23. 设 $w=f(x,y,u)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，$u=u(x,y)$由方程 $u^5-5xy+5u=1$ 所确定，求$\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

8.11.24. 已知 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+2yf\left(\frac{x}{y}\right)$，其中 f 为二次可微函数，且$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2(a>0,b>0)$，求 $f(y)$.

8.11.25. 证明：曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任一点处的切平面过某一定点，其中 $f(u,v)$为可微函数.

8.11.26. 设在曲面 $4z=x^2+y^2$ 上某点 M 处的切平面为 Π，已知 Π 过曲线 $x=t^2,y=t,z=3(t-1)$上对应于 $t=1$ 处的切线，

试求平面 Π 的方程.

8.11.27. 证明:曲面 $e^{2x-z}=f(\pi y-\sqrt{2}z)$ 为柱面,其中 $f(u)$ 可微.

8.11.28. 设在空间坐标系的原点处,置有一单位正电荷,另一单位负电荷在椭圆 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\x+y+z=1\end{cases}$ 上移动,问这两个点电荷间的引力何时最大?何时最小?

8.11.29. 已知曲面 $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^3f\left(\dfrac{y}{x}\right)$,其中函数 f 可微:

(1) 求曲面上任一点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程;

(2) 证明:曲面的切平面在 Oz 轴上的截距与切点到原点的距离之比为常数,并求此常数.

8.11.30. 设三角形 ABC 的三个顶点分别位于光滑曲线 $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, $\psi(x,y)=0$ 上. 证明:若三角形的面积达到极值,则曲线在三角形顶点处的法线通过三角形的垂心.

第九章 重 积 分

一、二重积分的概念与性质

(A)

9.1.1. 一薄板，位于 xOy 平面上，占有闭区域 D. 板的面密度为 $\rho=\rho(x,y)$，板以角速度 ω 绕 x 轴旋转. 试用二重积分表示板的动能.

9.1.2. 一薄板，铅直插在水中，占有平面闭区域 D. 试用二重积分表示薄板每面所受的水压力.

9.1.3. 根据二重积分的几何意义，确定下列积分的值：

(1) $\iint\limits_D (a-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant a^2$；

(2) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant a^2$；

(3) $\iint\limits_D (b-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant a^2, b>a>0$；

(4) $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant a^2$.

9.1.4. 比较下列各题中所给的两个二重积分的大小：

(1) $I_1=\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma,\qquad I_2=\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma,$

其中 D 是以 $(0,0)$、$(1,-1)$、$(1,1)$ 为顶点的三角形闭区域；

(2) $I_1=\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma,\qquad I_2=\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma,$

其中 D 为$(x-2)^2+y^2\leqslant 1$；

(3) $I_1=\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，　　$I_2=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，

其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant\frac{9}{16}$；

(4) $I_1=\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，　　$I_2=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，

其中 D 是以(1,1)、(1,−1)、(2,0)为顶点的三角形闭区域.

(B)

应用估值不等式 $m\sigma\leqslant\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M\sigma$（其中 m、M 分别为连续函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最小值和最大值，σ 为 D 的面积），估计9.1.5～9.1.8各题中的二重积分的值：

9.1.5. $\iint\limits_D(x+y+10)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为$(x-2)^2+(y-1)^2\leqslant 2$.

9.1.6. $\iint\limits_D(x^2+y^2+2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为$|x|+|y|\leqslant 1$.

9.1.7. $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为$(x-2)^2+(y-1)^2\leqslant 4$.

9.1.8. $\iint\limits_D(x+xy-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2$.

9.1.9. 设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，试按二重积分定义证明：

(1) 若闭区域 D 关于 y 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(-x,y)\mathrm{d}\sigma;$$

(2) 若闭区域 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,-y)\mathrm{d}\sigma;$$

(3) 若闭区域 D 关于原点对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(-x,-y)\mathrm{d}\sigma;$$

(4) 若闭区域 D 关于直线 $y=x$ 对称,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma.$$

根据题9.1.9的结论及二重积分的性质,确定9.1.10～9.1.14各题的积分值:

9.1.10. $\iint\limits_D (x+x^3y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant 4, y\geqslant 0$.

9.1.11. $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$,其中 D 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.

9.1.12. $\iint\limits_D (x^3-y^3)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 为 $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$.

9.1.13. $\iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant a^2$.

9.1.14. $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant 4$,而

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x^2+y^2\leqslant 1,\\ xy^2, & \text{当 } x^2+y^2>1.\end{cases}$$

二、二重积分的计算法

(A)

9.2.1. 求

$$\iint_D xy^2\cos(x^2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 为 $0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}$.

9.2.2. 求

$$\iint_D xy(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 由直线 $x-y=0, x+y=0$ 及 $x=1$ 围成.

在题9.2.3～9.2.6中，将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为二次积分（两种次序都要），其中积分区域 D 分别是：

9.2.3. 由曲线 $y=x^2$ 及 $y=4-x^2$ 所围成的.

9.2.4. 在第三象限内由直线 $y=2x$，$x=2y$ 及曲线 $xy=2$ 所围成的.

9.2.5. $(x-2)^2+(y-3)^2\leqslant 4$.

9.2.6. $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

更换9.2.7～9.2.9各题中的积分的积分次序：

9.2.7. $\int_0^a \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

9.2.8. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\mathrm{d}y$.

9.2.9. $\int_{-6}^{2} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

9.2.10. 求 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由直线 $x=2$，$y=x$ 及曲线 $xy=1$ 围成.

9.2.11. 求 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由曲线 $x=y^2$ 及直线 $x-y=2$ 围成.

利用极坐标计算9.2.12～9.2.13各题中的积分：

9.2.12. $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant ax\quad(a>0)$.

9.2.13. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2$.

把9.2.14～9.2.16各题中的积分化为极坐标形式的二次积分：

9.2.14. $\int_0^{2R} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

9.2.15.

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}dx\int_0^{Rx}f\left(\frac{y}{x}\right)dy+\int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R}dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f\left(\frac{y}{x}\right)dy.$$

9.2.16. $\iint\limits_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $(x^2+y^2)^3\leqslant 4a^2x^2y^2$，$x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

*9.2.17. 求下列变换的雅可比式：

(1) $\begin{cases}x=au+bv,\\ y=-bu+av;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=\dfrac{v}{u},\\ y=uv;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=\sqrt{u^2+v^2},\\ y=\arctan\dfrac{v}{u};\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x=ar\cos\theta,\\ y=br\sin\theta.\end{cases}$

利用形如 $x=x_0+ar\cos\theta$，$y=y_0+br\sin\theta$ 的变换计算9.2.18～9.2.20各题中的积分：

*9.2.18. $\iint\limits_D(2x+3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为

$$\frac{1}{4}(x-2)^2+\frac{1}{3}(y+1)^2\leqslant 1.$$

*9.2.19. $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.

*9.2.20. $\iint\limits_D\sqrt{\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)\Big/\left(1+\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.

(B)

计算9.2.21～9.2.38各题中的二重积分：

9.2.21. $\iint\limits_D x\sin\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由直线 $y=0, y=x$ 及 $x=1$ 围成.

9.2.22. $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由直线 $y=-x$ 及曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$,$y=\sqrt{x-x^2}$围成.

9.2.23. $\iint\limits_D (|x|+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为 $|x|+|y|\leqslant 1$.

9.2.24. $\iint\limits_D x(\sin y e^{x^2+\cos y}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为

$$-1\leqslant x\leqslant \sin y,\ |y|\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

9.2.25. $\iint\limits_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$,$\varphi(x)$ 为正值连续函数.

9.2.26. $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为

$$x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant |x|.$$

9.2.27. $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为 $2\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x$.

9.2.28. $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant 1$,$x+y\geqslant 1$.

*9.2.29. $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}$①,其中 D 为

$$x^2+y^2+2ay\leqslant 0,\ x-y\geqslant 0\ (a>0).$$

9.2.30. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 D 由曲线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$围成.

9.2.31. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 D 由直线 $y=x$ 及曲线 $y=x^2$围成.

---

① 这个积分是被积函数有无穷间断点的广义重积分,它是收敛的.本章内还有几个涉及广义重积分的题,除加"*"外,不再说明.

9.2.32. $\iint\limits_D (x^3y + x\sqrt{x^2+y^2} + y^3\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 D 为 $x^2+y^2 \leqslant ax(a>0)$.

9.2.33. $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $0 \leqslant x \leqslant 2, |y| \leqslant 2$. 而

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{当 } x^2+y^2 \leqslant 4, \\ 4, & \text{当 } x^2+y^2 > 4. \end{cases}$$

9.2.34. $\iint\limits_D |x^2+y^2-4|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $x^2+y^2 \leqslant 9$.

9.2.35. $\iint\limits_D |y^2-x^3|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $0 \leqslant x \leqslant 1, |y| \leqslant 1$.

9.2.36. $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $|x| \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$.

9.2.37. $\iint\limits_D (|x-y|+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为

$$x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0.$$

9.2.38. $\iint\limits_D |\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由直线 $y=0, y=x$ 及

$x=\dfrac{\pi}{2}$ 围成.

计算9.2.39～9.2.43各题中的二次积分：

9.2.39. $\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\int_{y-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

9.2.40. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y$.

9.2.41. $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\dfrac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y + \int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\dfrac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

9.2.42. $\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y \quad (a>0)$.

9.2.43. $\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}}\dfrac{x}{y}\mathrm{d}y$.

(C)

试交换9.2.44～9.2.46各题中的积分的积分次序：

9.2.44. $\int_0^3 dx\int_{\sqrt{3x}}^{x^2-2x} f(x,y)dy$.

9.2.45. $\int_{-1}^1 dx\int_{x^3}^{x} f(x,y)dy$.

9.2.46. $\int_0^{\pi} dx\int_0^{\cos x} f(x,y)dy$.

9.2.47. 将极坐标形式的二次积分

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}F(r,\theta)dr.$$

交换积分次序.

9.2.48. 求 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$.

9.2.49. 求 $\iint\limits_D [x+y]dxdy$,其中 D 为 $0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2$, $[x+y]$ 表示 $x+y$ 的整数部分.

*9.2.50. 求 $\iint\limits_D \frac{1}{y}x^2\sin(xy)dxdy$,其中 D 为

$$0<a\leqslant\frac{x^2}{y}\leqslant b,0<p\leqslant\frac{y^2}{x}\leqslant q.$$

*9.2.51. 设闭区域 D 为 $|x|+|y|\leqslant 1$, $f(u)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，证明

$$\iint\limits_D f(x+y)dxdy=\int_{-1}^1 f(u)du.$$

*9.2.52. 设闭区域 D 为 $1\leqslant xy\leqslant 2$, $1\leqslant\frac{y}{x}\leqslant 4$, $x>0$, $y>0$, $f(u)$ 在 $[1,2]$ 上连续，证明

$$\iint\limits_D f(xy)dxdy=\ln 2\int_1^2 f(u)du.$$

9.2.53. 设 $F(t)=\iint\limits_D f(|x|)dxdy$,其中 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上

连续，闭区域 D 为 $|y| \leqslant |x| \leqslant t$，求 $F'(t)$.

9.2.54. 求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant t^2$，$f(x,y)$ 在 D 上连续.

9.2.55. 求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^2}\int_0^t \mathrm{d}x\int_x^t \mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y$.

9.2.56. 设函数 $f(x,y)$、$g(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，且 $g(x,y)\geqslant 0$，证明存在点 $(\xi,\eta)\in D$，使

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

9.2.57. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，试用二重积分证明

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

9.2.58. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，试用二重积分证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

三、二重积分的应用

(A)

利用二重积分求9.3.1～9.3.6各题中所给曲线所围成的图形的面积：

9.3.1. $y^2=2px+p^2, y^2=-2qx+q^2\quad (p>0,q>0)$.

9.3.2. $xy=a^2, xy=2a^2, y=x, y=2x\quad (x>0,y>0)$.

9.3.3. $r^2=2a^2\cos 2\theta$.

9.3.4. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2), x^2+y^2=a^2\quad (x^2+y^2\geqslant a^2, x>0)$.

9.3.5. $(x^2+y^2)^2=2ax^3$.

*9.3.6. $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$，其中

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\delta\neq 0.$$

9.3.7. 求由平面 $x=0,y=0,z=0,x+y=1$ 及曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成的立体的体积.

9.3.8. 求由曲面 $x^2+y^2=2ax, az=x^2+y^2(a>0)$ 及平面 $z=0$ 所围成的立体的体积.

9.3.9. 设圆环的内外半径分别为 r 和 R，它在任一点处的面密度与该点到圆心的距离成反比，且在内圆周上的面密度为1，求它的质量.

求9.3.10～9.3.12各题所给闭区域 D 的形心：

9.3.10. D 由 $y^2=2-x$ 及 $2y^2=x+1$ 围成.

9.3.11. D 由 $y=x^2$ 及 $x+y=2$ 围成.

9.3.12. D 为 $x^2+y^2\leqslant a^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

9.3.13. 设三角形薄板所占闭区域由直线 $x=0,y=0$ 及 $x+y=1$ 围成，面密度 $\rho=x^2+y^2$，求它的重心.

9.3.14. 平面薄片所占闭区域 D 由曲线 $y^2=x^3$ 及直线 $y=x$ 围成，面密度 $\rho=1$，求它对 x 轴和 y 轴的转动惯量 I_x、I_y.

9.3.15. 平面薄片所占闭区域 D 为曲线 $r=a\sin 2\theta$ 所围成的一叶，面密度 $\rho=1$，求它对过原点且垂直 xOy 面的轴的转动惯量 I_z.

9.3.16. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 夹在平面 $z=\frac{a}{4}$ 与 $z=\frac{a}{2}$ 之间部分的面积.

9.3.17. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所截下的有限部分的面积.

9.3.18. 求圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $x+2z=3$ 所截下的有限部分的面积.

(B)

利用二重积分求9.3.19～9.3.22各题所给曲面所围成的立体的体积：

9.3.19. $2y^2=x$，$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$及 $z=0$.

9.3.20. $z=\sqrt{x^2+y^2}$及 $az=2a^2-x^2-y^2$ $(a>0)$.

9.3.21. $x^2+y^2=4z$ 及 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$.

9.3.22. $z=x^2+y^2$及 $y+z=2$.

9.3.23. 平面薄片所占闭区域为 $x^2+y^2\leqslant 2ax$，$x^2+y^2\leqslant 2ay$ $(a>0)$，面密度 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，求其质量.

求9.3.24～9.3.27各题所给平面闭区域的形心：

9.3.24. $0\leqslant y\leqslant \sin^2 x$，$0\leqslant x\leqslant \pi$.

9.3.25. $a\sqrt{2\cos 2\theta}\leqslant r\leqslant 2a\cos\theta$，$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{4}$.

9.3.26. $x^2+y^2\geqslant ax(a>0)$，$x^2+y^2\leqslant a^2$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$.

9.3.27. $r\leqslant a$，$r\leqslant a(1+\cos\theta)$.

9.3.28. 平面薄片的形状由摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$的一拱与 x 轴围成，面密度 $\rho=1$，求它对 x 轴的转动惯量.

9.3.29. 平面薄片所占闭区域为 $x^2+y^2\leqslant 2$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，面密度 $\rho=1$，求它对直线 $x+y=2$的转动惯量.

9.3.30. 平面薄片的形状由 $y^2=x$ 及 $x=1$ 围成，面密度 $\rho=1$，求它对于过原点的任一直线 $x\sin\theta-y\cos\theta=0$的转动惯量，并求此转动惯量的最大值和最小值.

9.3.31. 求由曲面 $x^2+y^2=az$ 及 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$所围立体的表面积.

9.3.32. 求由曲面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$及 $x^2+y^2=2az$ $(a>0)$所围立体的表面积.

9.3.33. 求由曲面 $x^2+y^2=ax$ 及 $x^2+y^2=\frac{a^2}{h^2}z^2 \quad (a>0)$所围立体的表面积.

9.3.34. 求抛物面$2z=x^2+y^2$被柱面$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$所截下的有限部分的面积.

9.3.35. 面密度为常数 ρ、半径为 R 的圆盘，在过圆心且垂直圆盘所在平面的直线上距圆心 a 处有一单位质量的质点，求圆盘对此质点的引力.

*9.3.36. 设平面薄片所占闭区域为 $a^2\leqslant xy\leqslant 2a^2, \frac{1}{2}\leqslant\frac{y}{x}\leqslant 2$, $x>0, y>0$，面密度 $\rho=1$，求它对 x 轴的转动惯量.

*9.3.37. 求椭圆抛物面 $z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b} \ (a>0, b>0)$被椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 割下的有限部分的面积.

9.3.38. 求球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=t^2 (0<t<2a)$位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$内部的面积. 问当 t 取何值时此面积最大?并求出此最大值.

9.3.39. 设平面薄板所占闭区域由曲线 $y=\ln x$，直线 $y=0$及 $x=\mathrm{e}$ 围成，面密度 $\rho=1$，求它对直线 $x=t$ 的转动惯量. 并问当 t 为何值时此转动惯量最小?

*9.3.40. 设平面薄板的形状由曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (a>b>0)$围成，面密度 $\rho=1$，求它对过原点的任一直线 $x\sin\alpha-y\cos\alpha=0$的转动惯量，并求此转动惯量的最大值和最小值.

9.3.41. 设平面薄板占有 xOy 平面上的半圆闭区域 $x^2+y^2\leqslant R^2, y\geqslant 0$，面密度为常数 ρ，求它对位于$(0,0,-a)$处的单位质量的质点的引力.

9.3.42. 平板斜浸在液体中，它的形心离开液面的深度为 h，试证板的一面所受液体的压力等于此板水平放在深度为 h 的位置时板上液柱的重量.

四、三重积分

(A)

在题9.4.1～9.4.2中，将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化成三次积分，其中积分区域 Ω 分别为：

9.4.1. Ω 由曲面 $3x^2+y^2=z$ 及 $z=1-x^2$ 围成.

9.4.2. Ω 由曲面 $z=xy$，平面 $y=x$，$x=1$ 及 $z=0$ 围成.

用直角坐标计算9.4.3～9.4.6各题中的三重积分：

9.4.3. $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{x+y+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

其中 Ω 由平面 $x=0$，$x=1$，$y=-x$，$z=0$ 及 $z=-x$ 围成.

9.4.4. $\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

其中 Ω 由曲面 $z=xy$，平面 $x+y=1$ 及 $z=0$ 围成.

9.4.5. $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

其中 Ω 由曲面 $x^2+y^2-2z^2=1$，平面 $z=1$ 及 $z=2$ 围成.

9.4.6. $\iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是半个椭球：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1, z\geqslant 0.$$

用柱面坐标计算9.4.7～9.4.8各题中的三重积分：

9.4.7. $\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

其中 Ω 由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 围成.

9.4.8. $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为

$$y^2+z^2\leqslant x^2, 1\leqslant x\leqslant 2.$$

用球面坐标计算9.4.9～9.4.10各题中的三重积分：

9.4.9. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为

$$a^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant b^2, z\geqslant 0.$$

9.4.10. $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成.

利用三重积分计算9.4.11～9.4.13各题所给曲面所围成的立体的体积：

9.4.11. 抛物面 $x=\sqrt{y-z^2}$，柱面 $x=\frac{1}{2}\sqrt{y}$ 及平面 $y=1$.

9.4.12. 抛物面 $az=x^2+y^2$ 及圆锥面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

9.4.13. 曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z \quad (a>0)$.

9.4.14. 求由圆锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=0$ 所围立体的形心.

9.4.15. 球体 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$，它在任一点 (x,y,z) 处的密度 $\rho=x^2+y^2+z^2$，求它的重心.

9.4.16. 密度为常数 ρ 的四面体，由平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标面围成，求它关于 z 轴的转动惯量.

*9.4.17. 求下列变换的雅可比式：

(1) $\begin{cases} x=ar\sin\varphi\cos\theta, \\ y=br\sin\varphi\sin\theta, \\ z=cr\cos\varphi; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=x_0+a_{11}u+a_{12}v+a_{13}w, \\ y=y_0+a_{21}u+a_{22}v+a_{23}w, \\ z=z_0+a_{31}u+a_{32}v+a_{33}w. \end{cases}$

*9.4.18. 求 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0.$$

(B)

计算9.4.19～9.4.28各题中的三重积分：

9.4.19. $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由曲面 $y=\sqrt{x}$，平面 $y=0, z=0$ 及 $x+z=\frac{\pi}{2}$ 围成.

9.4.20. $\iiint\limits_{\Omega} xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由平面，$z=0, x+y-z=0, x-y-z=0$ 及 $x=1$ 围成.

9.4.21. $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由曲面 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$，$2z=x^2+y^2$ 及平面 $z=0$ 围成.

9.4.22. $\iiint\limits_{\Omega} (y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为

$$y^2+z^2\leqslant 2x, 2\leqslant x\leqslant 8.$$

9.4.23. $\iiint\limits_{\Omega} e^{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由曲面 $x^2-y^2+z^2=1$，平面 $y=0$ 及 $y=2$ 围成.

9.4.24. $\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

9.4.25. $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为

$$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz.$$

9.4.26. $\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为

$$1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4, z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}.$$

9.4.27. $\iiint\limits_{\Omega} \left|z-\sqrt{x^2+y^2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由平面 $z=0$，$z=1$ 及曲面 $x^2+y^2=2$ 围成.

9.4.28. $\iiint\limits_{\Omega} \left|1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由曲面

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 围成.

计算9.4.29～9.4.32各题中的三次积分：

9.4.29. $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz$.

9.4.30. $\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz$.

9.4.31. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} dy\int_0^{1-x} \sqrt{1-z}\, e^z dz$.

9.4.32. $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y \frac{1-x}{1-z}\sin z dz$.

9.4.33. 将积分 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(z)dz$ 化为对 z 的定积分.

9.4.34. 设 $F(t)=\int_0^t dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)dz$，其中 $f(z)$ 连续. 试把 $F(t)$ 化为对 z 的定积分，并求 $F'''(t)$.

9.4.35. 设 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]dxdydz$，其中 $f(u)$ 连续，Ω 为 $0\leqslant z\leqslant h, x^2+y^2\leqslant t^2$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}F(t)$.

计算9.4.36～9.4.39各题所给空间闭区域的体积：

9.4.36. $x^2+y^2\leqslant 1, x^2+y^2+z^2\leqslant 4z, \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z$.

9.4.37. $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x, 0\leqslant z\leqslant xy$.

9.4.38. 在第一卦限内由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^3=27a^3xyz$ $(a>0)$ 围成.

*9.4.39. 由曲面 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=cz$ 围成.

9.4.40. 曲面 $x^2+y^2=az$ 将球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$ 分成两部分，求较小部分与较大部分体积之比.

9.4.41. 由曲面 $x^2+y^2=2ax, x^2+y^2=2az$ 及平面 $z=0$ 所围成的立体被平面 $x=y$ 分成两部分，求较小部分与较大部分体积之比.

9.4.42. 形如旋转抛物面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 20)$（坐标系长度单

位为 cm，z 轴铅直朝上）的容器，已盛有8π cm^{3}的水，今又注入120 cm^{3}的水，问水面升高多少？

9.4.43. 证明抛物面 $z=x^2+y^2+1$上任一点处的切平面与抛物面 $z=x^2+y^2$所围立体的体积为定值，并求出此定值.

9.4.44. 一立体由抛物面 $z=x^2+y^2$及平面 $z=1$围成，密度 $\rho=|x|+|y|$，求其质量.

9.4.45. 求由锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$与平面 $z=0$所围成的圆锥体的形心.

9.4.46. 求由抛物面 $z=1-x^2-y^2$与平面 $z=0$所围成的立体的形心.

9.4.47. 求由球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 与锥面 $\sqrt{x^2+y^2}=z\tan\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$所围成的立体的形心.

9.4.48. 求由椭圆抛物面 $y^2+2z^2=4x$ 与平面 $x=2$所围成的立体的形心.

9.4.49. 一立体是半径为 R、高为 h 的圆柱体上接半径为 R 的半个球(球心与圆柱顶面中心重合)，已知其形心位于球心处，求 h 与 R 之比.

9.4.50. 求密度为常数 ρ、半径为 R 的球体对于它的一条切线的转动惯量.

9.4.51. 求密度为常数 ρ、半径为 R、高为 h 的球缺对于它的对称轴的转动惯量.

9.4.52. 一立体由抛物面 $z=x^2+y^2$及平面 $z=2x$ 围成，密度 $\rho=y^2$，求它对 z 轴的转动惯量.

*9.4.53. 求密度为常数 ρ、半顶角为 α、高为 h 的圆锥体对位于其顶点处的单位质量的质点的引力的大小.

(C)

*9.4.54. 求 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为 $0<a\leqslant\sqrt{xy}\leqslant b,0<$

$\alpha \leqslant \frac{y}{x} \leqslant \beta, 0 < m \leqslant \frac{x^2+y^2}{z} \leqslant n, x > 0, y > 0, z > 0.$

9.4.55. 证明 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^3$，其中 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

*9.4.56. 密度为常数 ρ、半径为 R 的球体，在距球心为 a 的点处有一单位质量的质点，当 $a \leqslant R$ 时，求球体对此质点的引力的大小.

*9.4.57. 利用上题结果证明：内外半径分别为 R_1、R_2 的空心球体（其质量均匀分布），在距球心为 a 处有一质点，当 $a \leqslant R_1$ 时，空心球对此质点的引力为零.

9.4.58. 求球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 内各点到点 $A(0,0,a)(a \geqslant 0)$ 的距离的平均值（平均值 $\bar{\rho} = \frac{1}{V} \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)\mathrm{d}v$，其中 V 为 Ω 的体积，$\rho(x,y,z)$ 为点 (x,y,z) 到点 A 的距离).

9.4.59. 设物体质量为 M，其重心到轴 l 的距离为 d，L 为过重心且平行 l 的轴，I_l、I_L 依次表示物体对于 l 轴及 L 轴的转动惯量，证明

$$I_l = I_L + d^2 M.$$

9.4.60. 密度为常数 ρ 的圆柱体 $x^2+y^2 \leqslant R^2, 0 \leqslant z \leqslant h$，求它对直线 $x=0, z=ky$ 的转动惯量. 并问当 h/R 为何值时，此转动惯量与 k 无关？

9.4.61. 设椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\ (a>b>c>0)$ 的密度 $\rho=1$，求它对过原点的任一直线 $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{p}\ (l^2+m^2+p^2=1)$ 的转动惯量，并求此转动惯量的最大值和最小值.

9.4.62. 设立方体 $0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a$ 的密度 $\rho=1$，求它对过原点的任一直线 $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{p}\ (l^2+m^2+p^2=1)$ 的转动惯量，并求此转动惯量的最大值和最小值.

*五、含参变量的积分

(A)

9.5.1. 设 $F(x)=\int_0^x \frac{1}{y}\ln(1+xy)\mathrm{d}y$，求 $F'(x)$.

9.5.2. 设 $F(x)=\int_0^x (x-y)\sin(xy)\mathrm{d}y$，求 $F'(x)$.

9.5.3. 设 $F(x)=\int_{a+x}^{b+x} \frac{1}{y}\sin(xy)\mathrm{d}y$，求 $F'(x)$.

(B)

9.5.4. 设 $F(x,y)=\int_{\frac{y}{x}}^{xy}(y-xt)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(t)$ 具有连续导数，求 F''_{xy}.

9.5.5. 设 $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{y}e^{-xy}\mathrm{d}y$，求 $F'(x)$.

利用对参数的微分法计算9.5.6～9.5.8各题中的积分：

9.5.6. $\int_0^1 \frac{\arctan(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

9.5.7. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}e^{-\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x \quad (\alpha>0)$.

9.5.8. $\int_0^\pi \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}\cos x\right)}{\cos x}\mathrm{d}x$.

第十章　曲线积分与曲面积分

一、对弧长的曲线积分

(A)

10.1.1. 设一光滑弧段 L 位于第一象限，试用曲线积分表示 L 分别绕 x 轴和 y 轴所得旋转曲面的面积．

计算 10.1.2～10.1.9 各题中的曲线积分：

10.1.2. $\int_L x\sin y\mathrm{d}s$，其中 L 为原点至点(3,1)的直线段．

10.1.3. $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

10.1.4. $\int_L (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}s$，其中 L 为 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$，$0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}$.

10.1.5. $\oint_C (x+y)\mathrm{d}s$，其中 C 是以 $O(0,0)$、$A(1,0)$、$B(0,1)$为顶点的三角形的边界．

10.1.6. $\int_L y\mathrm{d}s$，其中 L 为抛物线 $y^2=2px$ 自点(0,0)至点(x_0,y_0)的弧段．

10.1.7. $\int_L x\mathrm{d}s$，其中 L 为双曲线 $xy=1$ 自点$\left(\frac{1}{2},2\right)$至点(1,1)的弧段．

10.1.8. $\int_\Gamma (x+y)z\mathrm{d}s$，其中 Γ 为连接点 $A(1,1,0)$ 与点

$B(2,3,4)$的直线段．

10.1.9. $\int_{\Gamma}\frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中 Γ 为 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=at$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

10.1.10. 设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$，且 $r'(\theta)$连续，证明

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta}f[r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta]\sqrt{[r'(\theta)]^2+[r(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta.$$

(B)

10.1.11. 有一段铁丝成半圆形 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，其上任一点处的线密度的大小等于该点的纵坐标，求其质量．

10.1.12. 设一段曲线 $y=\ln x$ $(x_1\leqslant x\leqslant x_2)$上任一点处的线密度的大小等于该点横坐标的平方，求其质量．

10.1.13. 设一段悬链线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}(0\leqslant x\leqslant a)$上任一点处的线密度与该点的纵坐标成反比，且在点$(0,a)$处的线密度为 δ，求它的质量．

10.1.14. 设一段柱面螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$上任一点处的线密度的大小等于该点向径的平方，求它的质量．

10.1.15. 设一段锥面螺线 $x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$，$z=e^t$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$上任一点处的线密度与该点向径的长度成反比，且在点$(1,0,1)$处线密度等于 1，求它的质量．

10.1.16. 求线密度为常数的心形线 $r=a(1-\cos\theta)$全弧的重心．

10.1.17. 求线密度为常数的摆线段 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant\pi)$的重心．

10.1.18. 求球面三角形 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$ 的围线(线密度为常数)的重心．

10.1.19. 求曲线段 $y=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right)$ 绕 y 轴旋转所得旋转曲面的面积.

10.1.20. 设抛物线弧段 $y=\frac{1}{2}(1-x^2)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$上任一点处的线密度的大小等于该点到 y 轴的距离，求它对 y 轴和 x 轴的转动惯量.

10.1.21. 求线密度为常数 ρ 的半圆周 $y=\sqrt{R^2-x^2}$对位于原点的单位质量的质点的引力.

10.1.22. 试用曲线积分表示柱面 $\varphi(x, y)=0$ 位于 $z_1(x, y)\leqslant z\leqslant z_2(x, y)$部分的面积.

10.1.23. 求柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被柱面 $z^2+x^2=a^2$ 所截下的有限部分的面积.

10.1.24. 求柱面 $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内的部分的面积.

(C)

10.1.25. 试利用对称性求 $\oint_\Gamma(x-y+z^2)\mathrm{d}s$，其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线.

二、对坐标的曲线积分

(A)

10.2.1. 设 L 是 x 轴上从点 $A(a, 0)$到点 $B(b, 0)$的线段，问积分 $\int_L\varphi(x)\mathrm{d}s$、$\int_L\varphi(x)\mathrm{d}x$ 与定积分 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$ 有什么关系?

计算 10.2.2～10.2.11 各题中的曲线积分:

10.2.2. $\int_L y\mathrm{d}x$，其中 L 为从点 $(-5, 0)$ 到点 $(0, 5)$ 的直线段.

10.2.3. $\oint_C x\mathrm{d}y$，其中 C 为由坐标轴和直线 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 围成的三角形的正向边界．

10.2.4. $\oint_C (x^2+y^2)\mathrm{d}y$，其中 C 为由直线 $x=1$，$y=1$，$x=3$，$y=5$ 围成的矩形的正向边界．

10.2.5. $\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，其中 L 的起点为原点，终点为(1，1)，L 的方程分别为：

(1) $y=x$； (2) $y=x^2$； (3) $y^2=x$； (4) $y=x^3$.

10.2.6. $\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$，其中 L 分别为

(1) 从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,2)$ 的直线段；

(2) 对称轴为 y 轴的抛物线从点 O 到点 A 的弧段；

(3) 从点 O 到点 $B(1,0)$ 再到点 A 的折线．

10.2.7. $\int_L x\sin y\mathrm{d}x-y\sin x\mathrm{d}y$，其中 L 为从点 $(\pi,0)$ 到点 $(0,\pi)$ 的直线段．

10.2.8. $\oint_C (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$，其中 C 为正向椭圆周 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

10.2.9. $\int_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 Γ 为螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的弧段．

10.2.10. $\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}y-x^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 为曲线 $\begin{cases}y=x^2,\\ z=x^3\end{cases}$ 从点(0，0，0)到点(1，1，1)的弧段．

10.2.11. $\int_\Gamma \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$，其中 Γ 为从点(−1，1，0)到点(2，0，1)的直线段．

(B)

计算 10.2.12～10.2.17 各题中的曲线积分：

10.2.12. $\oint_C \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 分别为：

(1) 正向圆周 $x^2+y^2=a^2$；

(2) 直线 $x=\pm a$，$y=\pm b$ 所围矩形的正向边界．

10.2.13. $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 为 $y=1-|1-x|$ 自点(0，0)至点(2，0)的折线．

10.2.14. $\oint_C \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围区域的正向边界．

10.1.15. $\int_L \left(1+\frac{1}{x}\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\ln x\mathrm{d}y$，其中 L 为从点(1，0)到点(2，1)的直线段．

10.2.16. $\int_L \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中 L 为从点 $A(0, -1)$ 到点 $B(1, 0)$ 再到点 $C(0, 1)$的折线段．

10.2.17. $\oint_\Gamma (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 Γ 为柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1(a>0, h>0)$的交线，从 z 轴正向看 Γ 为逆时针方向．

10.2.18. 设有一平面力场，其场力的大小与作用点向径的长度成正比，而从向径方向按逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角为场力的方向．试求当质点沿曲线 L 从点 $A(a, 0)$移动到点 $B(0, a)$时场力所作的功．其中 L 分别为：

(1) 圆周 $x^2+y^2=a^2$在第一象限的弧段；

(2) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$(见附录Ⅶ(7))在第一象限的弧段．

10.2.19. 设有一平面力场，其场力的大小等于作用点横坐标的平方，方向依纵轴负向．求质点沿抛物线 $1-x=y^2$ 从点 (1，0) 移动到点 (0，1) 时场力所作的功．

10.2.20. 在椭圆 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$ 上任一点 M 处有作用力 $\boldsymbol{F}$，其大小等于点 M 到原点的距离，方向朝着原点．试求：

(1) 质点 P 沿椭圆位于第一象限中的弧从点 $(a, 0)$ 移动到点 $(0, b)$ 时力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功；

(2) 质点 P 按正向走遍整个椭圆时力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功.

10.2.21. 由 $\boldsymbol{F}=(6xy, x^6y^2)$ 确定一平面力场，质点沿曲线 $y=ax^\lambda$ $(a>0, \lambda>0)$ 从原点移动到点 $A(1, a)$，问 a 为何值时场力所作的功与 λ 无关?

10.2.22. 设有一力场，其场力的大小与作用点到 xOy 平面的距离成反比，方向朝坐标原点. 试求当质点从点 $A(a,b,c)$ 沿直线移动到点 $B(2a, 2b, 2c)$ 时场力所作的功 $(c\neq0)$.

10.2.23. 设有一力场，其场力的大小与作用点到 z 轴的距离成反比，方向垂直 z 轴且指向 z 轴. 试求一质点沿圆弧 $x=\cos t$, $y=1$, $z=\sin t$ 从点 $A(1, 1, 0)$ 依 t 增长方向移动到点 $B(0,1,1)$ 时场力所作的功.

10.2.24. 由 $\boldsymbol{F}=(yz, -3xz, 2xy)$ 确定一力场，质点沿柱面 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 与平面 $y-z=0$ 的交线从点 $A(a, 0, 0)$ 移动到点 $B(-a,0,0)$，求场力所作的功.

10.2.25. 把对坐标的曲线积分 $\int_L x^2y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$ 化成对弧长的曲线积分，其中 L 为曲线 $y=x^2$ 从点 $A(-1,1)$ 到点 $B(1,1)$ 的弧段.

10.2.26. 把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma xyz\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$ 化成对弧长的曲线积分，其中 Γ 为曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 相应于 t 从0到1的弧段.

10.2.27. 设 Γ 为从点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 到点 $B(x_2, y_2, z_2)$ 的有向曲线弧，函数 $f(x)$、$g(y)$、$h(z)$ 连续，证明：

$$\int_\Gamma f(x)\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x;\ \int_\Gamma g(y)\mathrm{d}y=\int_{y_1}^{y_2} g(y)\mathrm{d}y;$$

$$\int_\Gamma h(z)\mathrm{d}z=\int_{z_1}^{z_2} h(z)\mathrm{d}z.$$

10.2.28. 把积分

$$\int_L [1+(xy+y^2)\sin x]\mathrm{d}x+(x^2+xy)\sin y\mathrm{d}y$$

化成形如$\int_L f(x)\mathrm{d}x+g(y)\mathrm{d}y$的积分，然后计算之. 其中$L$为上半椭圆$x^2+xy+y^2=1(y\geqslant 0)$自点$(-1,0)$至点$(1,0)$的弧段.

10.2.29. 求$\oint_C \dfrac{x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$C$为正向椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

10.2.30. 设有向光滑曲线弧Γ在xOy面上的投影曲线为L(L的正向与Γ的正向相应)，且Γ在光滑曲面$z=\varphi(x,y)$上，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$连续，证明：

(1) $\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y=\int_L P[x,y,\varphi(x,y)]\mathrm{d}x+Q[x,y,\varphi(x,y)]\mathrm{d}y$;

(2) $\int_\Gamma R(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_L R[x,y,\varphi(x,y)](\varphi'_x\mathrm{d}x+\varphi'_y\mathrm{d}y)$.

10.2.31. 利用上题结论，把空间曲线积分

$$\oint_\Gamma y^2z\mathrm{d}x+x^2z\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$$

化为平面曲线积分，然后计算之. 其中Γ为柱面$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$与抛物面$z=x^2+y^2$的交线，从z轴正向看Γ为逆时针方向.

10.2.32. 设有向光滑曲线弧Γ在光滑曲面$\Phi(x,y,z)=0$上，函数$f(x,y,z)$连续，证明

$$\int_\Gamma f(x,y,z)(\Phi'_x\mathrm{d}x+\Phi'_y\mathrm{d}y+\Phi'_z\mathrm{d}z)=0.$$

10.2.33. 利用上题结论，验证

$$\oint_\Gamma yz(x-x^2)\mathrm{d}x+zx(y-y^2)\mathrm{d}y+xy(z-z^2)\mathrm{d}z=0,$$

其中Γ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$与平面$x+y+z=0$的交线，从z轴正向看Γ为逆时针方向.

三、格 林 公 式

(A)

应用格林公式计算10.3.1～10.3.4各题中的积分：

10.3.1. $\oint_C xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x$，其中$C$为正向圆周$x^2+y^2=a^2$.

10.3.2. $\oint_C (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y$，其中$C$为正向椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

10.3.3. $\oint_C (x^2y-2y)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\mathrm{d}y$，其中$C$是由直线$x=1$，$y=x$，$y=2x$所围三角形的正向边界.

10.3.4. $\oint_C \left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$，其中$C$为正向圆周$(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

10.3.5. 证明曲线积分$\int_L (x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$与路径无关,并求$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$.

10.3.6. 证明曲线积分$\int_L \frac{y}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\mathrm{d}y$在右半平面内与路径无关，并求$\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\mathrm{d}y$.

10.3.7. 证明曲线积分

$$\int_L \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$$

在右半平面内与路径无关，并当L的起点为$(1,\pi)$、终点为$(2,\pi)$时计算此积分.

10.3.8. 验证$(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$为某函数的全微分，并求它的一个原函数.

10.3.9. 验证 $e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$ 为某函数的全微分，并求它的一个原函数.

10.3.10. 验证$\frac{1}{(x+y)^3}[(3y-x)dx+(y-3x)dy]$在半平面 $x+y>0$内为某函数的全微分，并求它的一个原函数.

(B)

10.3.11. 设 L 为自点 $A(x_1, y_1)$至点 $B(x_2, y_2)$的有向光滑曲线，$f(u)$为连续函数，$u_1=x_1y_1$，$u_2=x_2y_2$，证明

$$\int_L f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\int_{u_1}^{u_2}f(u)\mathrm{d}u.$$

10.3.12. 设 L 为自点 $A(x_1, y_1)$ 至点 $B(x_2, y_2)$ 的有向光滑曲线，$\varphi(x,y)$ 有连续的偏导数，$f(u)$ 为连续函数，$\varphi(x_1,y_1)=u_1$，$\varphi(x_2,y_2)=u_2$. 证明

$$\int_L f[\varphi(x,y)](\varphi'_x\mathrm{d}x+\varphi'_y\mathrm{d}y)=\int_{u_1}^{u_2}f(u)\mathrm{d}u.$$

10.3.13. 求 $\oint_C \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$，其中 C 为不经过原点的正向闭曲线.

10.3.14. 设 L 为自点 $A(x_1, y_1)$至点 $B(x_2, y_2)$的有向光滑曲线，τ 为 L 的切向量，$u(x,y)$有连续的偏导数. 证明

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial \tau}\mathrm{d}s=\int_L \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1).$$

10.3.15. 求心形线 $x=2a\cos t-a\cos 2t$，$y=2a\sin t-a\sin 2t$ 所围图形的面积.

10.3.16. 设在右半平面内力 $F=-\frac{k}{r^3}(x, y)$构成一力场，其中 k 为常量，$r=\sqrt{x^2+y^2}$. 证明质点在此力场内运动时，场力所作的功与运动路径无关.

10.3.17. 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点处有一质量

为 M 的质点 G，另一质量为 m 的质点 P 沿椭圆正向从点 $A(a,0)$ 移动到点 $B(0,b)$，求质点 G 对质点 P 的引力所作的功.

10.3.18. 设 L 为半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$ 自点 $A(1,0)$ 至 $B(0,1)$，求

$$\int_L (y^2e^x+3x^2+2xy+y^2)\mathrm{d}x+(2ye^x+x^2+2xy-3y^2)\mathrm{d}y.$$

10.3.19. 设 L 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 自点 $O(0,0)$ 至点 $A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的弧段，求

$$\int_L(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y.$$

10.3.20. 已知点 O(0,0)及点 A(1,1)，且曲线积分

$$I=\int_{\widehat{OA}}(ax\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(by\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$$

与路径无关，试确定常数 a、b，并求 I.

10.3.21. 求 $\oint_C y^2\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y$，其中 C 为正向椭圆周 $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$.

10.3.22. 设 $I_1=\int_{\overline{AB}}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y$,

$$I_2=\int_{\widehat{AnB}}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y,$$

其中 $\overline{AB}$ 为自点 $A(1,1)$ 至点 $B(2,6)$ 的直线段，$\widehat{AnB}$ 为自 A 至 B 的抛物线弧，该抛物线的轴与 y 轴平行，且通过原点. 求 I_2-I_1.

10.3.23. 设 $I=\oint_C y^3\mathrm{d}x+(3x-x^3)\mathrm{d}y$，其中 C 为正向圆周 $x^2+y^2=a^2$. 问 $a(a>0)$ 为何值时 I 最大？并求出此最大值.

10.3.24. 验证 $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}$ 在右半平面内为某个函数的全微分，并求它的一个原函数.

10.3.25. 全平面去掉原点及 x 轴负半轴所得单连通区域记作 G，证明在 G 内曲线积分

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x + y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$$

与路径无关,并求被积表达式的一个原函数.

10.3.26. 已知在右半平面内存在函数 $u(x,y)$,使

$$\mathrm{d}u=\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\lambda}},$$

试确定常数 λ,并求 $u(x,y)$.

10.3.27. 已知在右半平面内存在函数 $u(x,y)$,使

$$\mathrm{d}u=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}[(y^2+2xy+ax^2)\mathrm{d}x-(x^2+2xy+by^2)\mathrm{d}y],$$

试确定常数 a、b,并求 $u(x,y)$.

10.3.28. 已知在上半平面内存在函数 $u(x,y)$,使

$$\mathrm{d}u=\frac{x}{y}r^{\lambda}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}r^{\lambda}\mathrm{d}y,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 试确定常数 λ,并求 $u(x,y)$.

10.3.29. 设 L 为自点 $A(-R,0)$ 至点 $B(R,0)$ 的半圆周 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ $(R>0)$,求

$$\int_L \frac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}\mathrm{d}x+[4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2})]\mathrm{d}y.$$

10.3.30. 求 $\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$,其中 L 为自原点至点 $A(a,0)$ 的半圆周 $y=\sqrt{ax-x^2}$ $(a>0)$.

10.3.31. 求 $\int_{\widehat{ABC}}(a_1x+b_1y+c_1)\mathrm{d}x+(a_2x+b_2y+c_2)\mathrm{d}y$,其中 $\widehat{AB}$ 为自点 $A(-1,0)$ 至点 $B(0,1)$ 的圆弧 $y=\sqrt{1-x^2}$,$\widehat{BC}$ 为从点 B 到点 $C(1,0)$ 的抛物线弧 $y=1-x^2$.

10.3.32. 求 $\int_{\widehat{AnB}}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y$,其中 $\varphi'(y)$ 连续,$\widehat{AnB}$ 为自点 $A(x_1,y_1)$ 至点 $B(x_2,y_2)$ 的曲线弧,它与直线段 $\overline{AB}$ 除端点外不再相交,且它与 $\overline{AB}$ 所围成的图形面积为 σ.

10.3.33. 设 L 为自点 $A(1,0)$ 至点 $B(0,1)$ 的圆弧 $y=\sqrt{1-x^2}$,求

$$\int_L[y^2+\sin^2(x+y)]dx+[x^2-\cos^2(x+y)]dy.$$

10.3.34. 求 $\int_L(xe^{2y}+y)dx+(x^2e^{2y}-y)dy$,其中 L 为自原点至点 $A(2,2)$ 的圆弧 $y=\sqrt{4x-x^2}$.

10.3.35. 求 $\oint_C\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,

其中 C 为正向椭圆周 $4x^2+y^2=1$.

10.3.36. 求 $\oint_C\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$,其中 C 为正向圆周 $x^2+y^2=1$.

10.3.37. 由 $\boldsymbol{F}=\frac{1}{x^2+y^2}\{2x-y,x+2y\}$ 确定一平面力场,质点在场力作用下沿闭曲线 C 按逆时针方向绕行一周(C 不经过原点),求场力所作的功.

(C)

10.3.38. 求 $I=\oint_C\frac{1}{r}\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})ds$,其中 C 为不经过原点的闭曲线,$\boldsymbol{r}$ 为 C 上任一点的向径,$r=|\boldsymbol{r}|$,$\boldsymbol{n}$ 为 C 的朝外的法向量.

10.3.39. 设 $u(x,y)=x^2-xy+y^2$,L 为抛物线 $y=x^2$ 自原点至点 $A(1,1)$ 的有向弧段,$\boldsymbol{n}$ 为 L 的切向量顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角所得的法向量,$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为函数 u 沿法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数. 计算 $\int_L\frac{\partial u}{\partial n}ds$.

10.3.40. 设 $\boldsymbol{n}$ 为闭曲线 C 的朝外的法向量,D 为 C 所围成的闭区域,函数 $u(x,y)$ 有二阶连续偏导数. 证明

$$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy.$$

10.3.41. 如果函数 $u(x,y)$ 在区域 G 内有二阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,那末称 $u(x,y)$ 在 G 内是调和函数.

设$u(x,y)$在单连通区域G内是调和函数，有向曲线弧$L\subset G$，$\boldsymbol{n}$为L的切向量顺时针旋转$\frac{\pi}{2}$角所得的法向量.

(1) 证明曲线积分$\int_L \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$在$G$内与路径无关；

(2) 记$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$，证明$v(x,y)$在$G$内也是调和函数.

10.3.42. 求$\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$L$为抛物线$y=1-2x^2$自点$A(-1,-1)$至点$B(1,-1)$的弧段.

10.3.43. 设函数$P(x,y)$、$Q(x,y)$的一阶偏导数除点$(0,1)$及点$(0,-1)$外处处连续，且$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 记

$$\oint_{C_i} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=A_i(i=1,2,3,4).$$

已知当C_1为正方形$|x|\leqslant 3$，$|y|\leqslant 3$的正向边界时，$A_1=4$；当C_2为正向圆周$x^2+(y-1)^2=1$时，$A_2=7$. 问当C_3为正向圆周$x^2+(y+1)^2=1$时A_3等于多少？当C_4为正向椭圆周$x^2+4y^2=1$时A_4等于多少？

10.3.44. 设函数$u(x,y)$、$v(x,y)$具有一阶连续偏导数，且满足$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. 证明

$$\oint_C \frac{1}{x^2+y^2}[(xv-yu)\mathrm{d}x+(xu+yv)\mathrm{d}y]=2\pi u(0,0),$$

其中C为包围原点的正向闭曲线.

四、对面积的曲面积分

(A)

10.4.1. 设有一分布着质量的曲面Σ，它在点(x,y,z)处的

密度为 $\rho(x,y,z)$，试用曲面积分表示它的重心坐标.

计算10.4.2～10.4.7各题中的曲面积分：

10.4.2. $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$及三个坐标面所围立体的表面.

10.4.3. $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

10.4.4. $\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2\mathrm{d}S$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

10.4.5. $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面 $z=1$所截下的有限部分.

10.4.6. $\iint\limits_{\Sigma}(xy+z^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$位于闭区域 $x^2+y^2\leqslant 4$ 内的部分.

10.4.7. $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{1+4z}\mathrm{d}S$，其中 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2$被平面 $z=1$所截下的有限部分.

(B)

10.4.8. 设曲面 Σ 在点(x,y,z)处的面密度为 $\rho(x,y,z)$，试用曲面积分表示它对于直线$\dfrac{x}{l}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{p}$ $(l^2+m^2+p^2=1)$的转动惯量.

计算10.4.9～10.4.11各题中的曲面积分：

10.4.9. $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为圆柱面$x^2+y^2=R^2$介于平面 $z=0$ 与 $z=H$ 之间的部分.

10.4.10. $\oiint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，而

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & \text{当 } z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & \text{当 } z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

10.4.11. $\iint\limits_{\Sigma}|z|\mathrm{d}S$，其中 Σ 为双曲抛物面 $az=xy$ $(a>0)$被柱面 $x^2+y^2=a^2$所截下的有限部分.

10.4.12. 设半径为 a 的球面在任一点处的面密度的大小等于该点到某一定直径的距离，求此球面的质量.

10.4.13. 设 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2$位于 $z\leqslant 1$内的部分，面密度为常数 ρ，求它对于 z 轴的转动惯量.

10.4.14. 设 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截下的有限部分，面密度为常数，求它的重心.

10.4.15. 设 L 为 yOz 面上位于 $y\geqslant 0$内的光滑曲线段，L 绕 z 轴旋转得曲面 Σ，函数 $f(y,z)$ 在 L 上连续. 证明

$$\iint\limits_{\Sigma}f(\sqrt{x^2+y^2},z)\mathrm{d}S=2\pi\int_L f(y,z)y\mathrm{d}s.$$

10.4.16. 设 L 为 xOy 面上的光滑曲线段，函数 $z_1(x,y)$、$z_2(x,y)$在 L 上连续. Σ 是以 L 为准线而母线平行于 z 轴的柱面位于 $z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$内的部分，函数 $f(x,y,z)$在 Σ 上连续. 证明

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\int_L\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right]\mathrm{d}s.$$

10.4.17. 利用上题的公式计算 $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$内部的部分.

五、对坐标的曲面积分

(A)

计算10.5.1～10.5.7各题中的曲面积分：

10.5.1. $\iint\limits_{\Sigma} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 位于第一卦限部分的上侧.

10.5.2. $\iint\limits_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧位于第一卦限部分.

10.5.3. $\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的部分的下侧.

10.5.4. $\iint\limits_{\Sigma} z \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 上侧在 $x^2+y^2\leqslant ax$ $(a>0)$ 内的部分.

10.5.5. $\oiint\limits_{\Sigma} (x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为立方体 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 表面的外侧.

10.5.6. $\iint\limits_{\Sigma} zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=h$ $(h>0)$ 之间的在第一卦限内的部分的前侧.

10.5.7. $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 的上侧在 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 内的部分.

10.5.8. 把对坐标的曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成对面积的曲面积分，其中

(1) Σ 是平面 $x-2y+3z=6$ 在第二卦限的部分的上侧；

(2) Σ 是半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧 $(a>0)$；

(3) Σ 是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 在 $y\leqslant 0$，$0\leqslant z\leqslant h$ 内的部分的左侧 $(a>0)$.

(B)

计算10.5.9～10.5.15各题中的曲面积分：

10.5.9. $\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 的外侧.

10.5.10. $\iint\limits_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

10.5.11. $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，

其中 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 上侧在 $z\leqslant 1$ 内的部分.

10.5.12. $\iint\limits_{\Sigma} x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=a^2$ 在 $0\leqslant z\leqslant 2$ 内的部分，Σ 在任一点处的法向量与该点的向径成锐角.

10.5.13. $\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$，$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 Σ 的朝下的单位法向量.

10.5.14. $\iint\limits_{\Sigma} y^2z^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

10.5.15. $\iint\limits_{\Sigma} xy\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为柱面 $z^2+x^2=1(0\leqslant y\leqslant 2)$，它在任一点处的法向量与该点的向径成锐角.

10.5.16. 设有向曲面 Σ 满足方程 $\varphi(x,y,z)=0$，$\varphi(x,y,z)$ 有连续的偏导数，且 $\varphi'_z\neq 0$. 证明

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\frac{\varphi'_x}{\varphi'_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\frac{\varphi'_y}{\varphi'_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

10.5.17. 利用上题结果计算

$$\iint_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant a)$的下侧.

六、高斯公式　通量与散度

(A)

利用高斯公式计算10.6.1～10.6.8各题中的曲面积分：

10.6.1. $\oiint_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 是由柱面 $x^2+y^2=1$，平面 $z=0$及 $z=3$所围成的立体的表面外侧.

10.6.2.

$$\oiint_{\Sigma}(x^2-2xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-2yz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为长方体$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 2$，$0\leqslant z\leqslant 3$的表面外侧.

10.6.3. $\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$的内侧.

10.6.4. $\oiint_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由平面 $x+y+z=1$与三个坐标面所围成的四面体的表面外侧.

10.6.5. $\oiint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由抛物面 $z=x^2+y^2$与平面 $z=1$所围成的立体的表面外侧.

10.6.6. $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的立体的表面外侧.

10.6.7. $\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $z^2=x^2+y^2$ 所围成的立体的表面外侧.

10.6.8. $\oiint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由抛物面 $z=x^2+y^2$、圆柱面 $x^2+y^2=1$ 及三个坐标面在第一卦限中所围成的立体的表面外侧.

10.6.9. 证明

$$\oiint\limits_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S=0,$$

其中函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在由 Σ 围成的闭区域 Ω 上有二阶连续偏导数，$(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ 为 Σ 的指向外侧的单位法向量.

10.6.10. 求下列向量场的散度：

(1) $\boldsymbol{A}=(x^2,xy,xz)$；

(2) $\boldsymbol{A}=(x^2(y+z),y^2(z+x),z^2(x+y))$；

(3) $\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}\boldsymbol{r}$，其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$r=|\boldsymbol{r}|$；

(4) $\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$.

10.6.11. 设 Σ 为任一闭曲面，验证下列各曲面积分均为零：

(1) $\oiint\limits_{\Sigma}x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(2) $\oiint\limits_{\Sigma}(xe^y-e^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(ye^z-e^y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(ze^x-e^x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(3) $\oiint\limits_{\Sigma} x^2z(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - y\mathrm{d}z\mathrm{d}x - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$；

(4) $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2 - 2xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^2 - 2yz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

$$+(z^2-2zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(B)

计算10.6.12～10.6.18各题中的曲面积分：

10.6.12. $\iint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为抛物面 $az=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant a)$的下侧.

10.6.13. $\iint\limits_{\Sigma}(x^2 - yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^2 - zx)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ $(z\geqslant 0)$的上侧.

10.6.14. $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x + y + z + c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半椭球面$\dfrac{z}{c}=\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2-\left(\dfrac{y}{b}\right)^2}$的上侧($a,b,c$ 均为正).

10.6.15. $\iint\limits_{\Sigma} 4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1 - z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 yOz 面上的曲线 $z=\mathrm{e}^y$ $(0\leqslant y\leqslant a)$绕 z 轴旋转所得曲面的下侧.

10.6.16. $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2$上侧在 $x\geqslant 0$，$0\leqslant z\leqslant 1$内的部分.

10.6.17. $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^2 - 2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(z\leqslant 1)$的下侧.

10.6.18. $\iint\limits_{\Sigma}(8y + 1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2(1 - y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为抛物面 $x^2+z^2=y-1$ $(1\leqslant y\leqslant 3)$的左侧.

10.6.19. 求向量 $A=\left(1,z,\frac{e^z}{z}\right)$ 穿过曲面 $z^2=x^2+y^2$ $(1\leqslant z\leqslant 2)$ 流向下侧的通量.

10.6.20. 求向量 $A=(xy+z,\ zx+y,\ yz+x)$ 流出立体 Ω 的通量，其中 Ω 由曲面 $z=1-x^2-y^2$ 与平面 $2y=z$ 围成.

(C)

10.6.21. 求 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{r^2}\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})\mathrm{d}S$，其中 Σ 为不经过原点的闭曲面，$\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的朝外的单位法向量，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$r=|\boldsymbol{r}|$.

10.6.22. 求 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，其中 Σ 为椭圆抛物面 $z=1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2(z\geqslant 0)$ 的上侧.

10.6.23. 求 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\right]^{3/2}}$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧.

七、斯托克斯公式　环流量与旋度

(A)

10.7.1. 求下列向量场 A 的旋度：

(1) $A=(yz^2,\ zx^2,\ xy^2)$；　(2) $A=(yz^2,\ xz^2,\ xyz)$；

(3) $A=(2z-3y,\ 3x-z,\ y-2x)$；

(4) $A=(x^2-xy,\ y^2-yz,\ z^2-zx)$.

*10.7.2. 验证曲线积分 $\int_{\widehat{AB}}x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y-z^3\mathrm{d}z$ 与路径无关，并当 A 为 $(1,-1,1)$、B 为 $(3,2,-1)$ 时计算此积分.

*10.7.3. 验证曲线积分 $\int_{\widehat{AB}}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y-z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 与路径无关，

并当 A 为(1,−2,2)、B 为(3,0,−4)时计算此积分.

*10.7.4. 验证向量场 $\boldsymbol{A}=-\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\ (r\neq 0)$的旋度为零向量，其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$r=|\boldsymbol{r}|$. 并求一个函数 $u(x,y,z)$，使 $\mathbf{grad}\ u=\boldsymbol{A}$.

(B)

利用斯托克斯公式计算10.7.5～10.7.10各题中的曲线积分：

10.7.5. $\oint_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 Γ 为柱面 $x^2+y^2=1$与平面 $x+y+z=1$的交线，从 z 轴正向看 Γ 为逆时针方向.

10.7.6. $\oint_\Gamma y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$外侧位于第一卦限部分的正向边界.

10.7.7. $\oint_\Gamma (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$与平面 $x\sin\alpha-y\cos\alpha=0\ (0<\alpha<\pi)$的交线，从 x 轴正向看 Γ 为逆时针方向.

10.7.8. $\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，

其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$ 与平面 $x+y=2$ 的交线，从 x 轴正向看 Γ 为顺时针方向.

10.7.9. $\oint_\Gamma z^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}z$，

其中 Γ 为半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$与柱面 $x^2+y^2=ax\ (a>0)$的交线，从 z 轴正向看 Γ 为逆时针方向.

10.7.10. $\oint_\Gamma xy\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+zx\mathrm{d}z$，

其中 Γ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$与柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$的交线，从 z 轴正向看 Γ 为逆时针方向.

10.7.11. 设有向闭曲线 Γ 在平面 π 上，π 的方程为 $ax+by+cz=p$，其中 $a^2+b^2+c^2=1$，Γ 在 π 上所围面积为 σ，Γ 的正向与 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$符合右手法则. 求向量场 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}$ 沿 Γ 的环流量

$(\boldsymbol{r}=(x,y,z))$.

10.7.12. 求向量 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{x^2+y^2}(-y,x,0)$ 沿着与 z 轴不相交的闭曲线 Γ 的环流量. 其中

(1) Γ 不围绕 z 轴;

(2) Γ 围绕 z 轴一圈.

*10.7.13. 证明在 $z>0$ 内存在函数 $u(x,y,z)$，使

$$\mathrm{d}u=\frac{(x+y-z)\mathrm{d}x+(x+y-z)\mathrm{d}y+(x+y+z)\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy},$$

并求函数 $u(x,y,z)$.

*10.7.14. 质量为 m 位于坐标原点的质点所产生的引力场为 $\boldsymbol{F}=-\frac{fm}{r^3}\boldsymbol{r}$，其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$r=|\boldsymbol{r}|$. 求 $\boldsymbol{F}$ 的势(即求函数 $u(x,y,z)$，使 $\mathbf{grad}\ u=\boldsymbol{F}$).

*10.7.15. 求质量为 m_i 位置在 $P_i(\boldsymbol{r}_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的质点系所产生的引力场的势.

*10.7.16. 设 f 可导，u 及 $\boldsymbol{A}$ 的分量都有二阶连续偏导数，证明

(1) $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$;

(2) $\nabla\cdot(u\boldsymbol{A})=u(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+(\nabla u)\cdot\boldsymbol{A}$;

(3) $\nabla\times(u\boldsymbol{A})=u(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\nabla u)\times\boldsymbol{A}$;

(4) $\nabla\times(\nabla u)=\mathbf{0}$;

(5) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$.

*10.7.17. 记 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，$f(r)$ 可导，证明

(1) $\nabla r=\frac{1}{r}\boldsymbol{r}$，$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$，$\nabla\times\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$;

(2) $\nabla f(r)=\frac{1}{r}f'(r)\boldsymbol{r}$;

(3) $\nabla\cdot[f(r)\boldsymbol{r}]=3f(r)+f'(r)r$;

(4) $\nabla\times[f(r)\boldsymbol{r}]=\mathbf{0}$.

*10.7.18. 设 f 二阶可导，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\nabla^2 f(r)$.

*10.7.19. 设 $\boldsymbol{a}$ 为常向量，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，Γ 为有向曲面 Σ 的正向边界. 证明

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\iint_{\Sigma}2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为 Γ 的单位切向量，$\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的单位法向量.

第十一章　无穷级数

一、常数项级数的概念和性质

(A)

11.1.1. 写出下列各级数的一般项 u_n：

(1) $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\cdots$；

(2) $-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\cdots$；

(4) $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\cdots$；

(5) $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}+\cdots$.

11.1.2. 根据级数收敛与发散的定义，判别下列各级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[2n+1]{a}-\sqrt[2n-1]{a})\ (a>0)$；

(2) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$.

11.1.3. 判别下列各级数的收敛性：

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots$；

(2) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots+\frac{n+1}{n+2}+\cdots$；

(3) $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln^2 2}{2^2}+\frac{\ln^3 2}{2^3}+\cdots+\frac{\ln^n 2}{2^n}+\cdots$;

(4) $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{n}{2n-1}+\cdots$;

(5) $\left(\frac{1}{6}+\frac{8}{9}\right)+\left(\frac{1}{6^2}+\frac{8^2}{9^2}\right)+\left(\frac{1}{6^3}+\frac{8^3}{9^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{6^n}+\frac{8^n}{9^n}\right)+\cdots$;

(6) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5\cdot 1}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5\cdot 2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5\cdot 3}\right)+\cdots$
$+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{5\cdot n}\right)+\cdots$.

(B)

11.1.4. 判别下列各级数的收敛性：

(1) $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
$+\cdots$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

*11.1.5. 利用柯西审敛原理判别下列各级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2^n}$;　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n(n+1)}$.

11.1.6. 已知 $a_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，并求这个级数的和.

11.1.7. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，且 $a_n<c_n<b_n$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\sum_{n=1}^{\infty}c_n<\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

11.1.8. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;　　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

二、常数项级数的审敛法

(A)

11.2.1. 用比较审敛法或极限审敛法判别下列各级数的收敛性:

(1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}+\cdots$;

(3) $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{n}{2n-1}+\cdots$;

(4) $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\cdots+\frac{n!}{n^n}+\cdots$;

(5) $\tan 1+\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\tan\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}+\cdots$.

11.2.2. 用比值审敛法判别下列各级数的收敛性:

(1) $\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{n+2}{2^n}+\cdots$;

(2) $\frac{5}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\cdots+\frac{5^n}{n!}+\cdots$;

(3) $\frac{1!}{10}+\frac{2!}{10^2}+\frac{3!}{10^3}+\cdots+\frac{n!}{10^n}+\cdots$;

(4) $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\cdots+\frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdots(4n-3)}+\cdots$。

11.2.3. 用根值审敛法判别下列各级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

11.2.4. 判别下列各级数的收敛性：

(1) $\frac{2}{3}+\frac{3}{6}+\frac{4}{11}+\cdots+\frac{n+1}{n^2+2}+\cdots$；

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{n!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$
$+\cdots$；

(3) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\ 2^{2n-1}}+\cdots$；

(4) $\frac{3\cdot 1!}{1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\frac{3^n\cdot n!}{n^n}+\cdots$；

(5) $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3}+\frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$
$+\frac{1000\cdot 1001\cdot \cdots\cdot\ (1000+n-1)}{(2n-1)!!}+\cdots$；

(6) $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\cdots+\frac{n}{1000n+1}+\cdots$；

(7) $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\cdots+\frac{n}{1+n^2}+\cdots$.

11.2.5. 判别下列各级数的收敛性；如果收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}+\cdots$；

(2) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\ (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots$；

(3) $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}-\cdots+\ (-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}+\cdots$；

(4) $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\frac{27}{8}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n^3}{2^n}+\cdots$；

(5) $\frac{1}{2}-\frac{2^{10}}{2^2}-\frac{3^{10}}{2^3}+\cdots+\ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{10}}{2^n}+\cdots$.

11.2.6. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{1+u_n}$ 也收敛.

(B)

11.2.7. 判别下列各级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$;　　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\ln n}$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;　　　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ $(a>0)$.

11.2.8. 设 $a>0$, $s>0$. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ 的收敛性.

11.2.9. 证明：若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 也收敛. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 不是正项级数，上述命题是否成立？为什么？

11.2.10. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{u_n}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)^2$ 都收敛.

11.2.11. 设 $u_n \neq 0$ $(n=1, 2, \cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \neq 0$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_{n+1}-u_n|$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right|$ 具有相同的收敛性.

11.2.12. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. 问能否断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛，并说明理由.

11.2.13. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且当 $n \geqslant N$ 时，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

成立. 证明：

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛；

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

11.2.14. 证明：若数列 $\{nu_n\}$ 有界，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

11.2.15. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散. 试判断下述各结论的正确性，并说明理由：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 发散；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ 发散；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$ 发散.

11.2.16. 判定下列各级数是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n - \ln n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p}$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sin\left(n\pi + \dfrac{1}{\ln n}\right)$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\ln n}{n}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \dfrac{n}{n+1}$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\ln n}{n!}$.

11.2.17. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，试讨论下列各级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min\{u_n, v_n\}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\{u_n, v_n\}$.

11.2.18. 设

$$v_n = \frac{|u_n| + u_n}{2} = \begin{cases} u_n, & u_n > 0; \\ 0, & u_n \leqslant 0. \end{cases} (n = 1, 2, \cdots)$$

$$w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2} = \begin{cases} -u_n, & u_n < 0; \\ 0, & u_n \geqslant 0, \end{cases} (n = 1, 2, \cdots)$$

证明：

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ 都收敛；

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ 都发散.

11.2.19. 设 $u_n>0$ ($n=1, 2, \cdots$) 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\lambda$. 证明：

(1) 当 $\lambda>0$ 或 $\lambda=+\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(2) 当 $\lambda<0$ 或 $\lambda=-\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

11.2.20. 设 $f(x)$ 为 $[1, +\infty)$ 上的非负单调减少函数，$u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与广义积分

$$I=\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

同时收敛或同时发散.

11.2.21. 利用上一题的结论，判别下列各级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}(p\geqslant 0)$；　　(2) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n\ln\ln n}$；

(3) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}(p>1)$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\ln n}}$.

11.2.22. 设数列 $\{u_n\}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$$

收敛.

(C)

11.2.23. 设 $u_n>0$ ($n=1, 2, \cdots$) 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{1}{u_n}}{\ln n}=\lambda$$

存在. 证明：

(1) 当 $\lambda>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(2) 当 $\lambda<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

11.2.24. 设 $u_n>0$ ($n=1$, 2, …), $p>1$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^p\left(e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)u_n\right]=1.$$

试讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性.

11.2.25. 设 $u_n>0$ ($n=1$, 2, …) 且

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot u_n\right)=1.$$

试讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性.

11.2.26. 利用关系式 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$. 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\qquad(p>0)$$

的收敛性与绝对收敛性.

三、幂　级　数

(A)

求题 11.3.1～11.3.8 中各幂级数的收敛半径与收敛区间：

11.3.1. $x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\cdots$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}+\cdots;$$

11.3.2. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots$;

11.3.3. $x+x^4+x^9+\cdots+x^{n^2}+\cdots$;

11.3.4. $(x+1)-\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(x+1)^3}{3}-\cdots$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(x+1)^n}{n}+\cdots;$$

11.3.5. $\frac{x-1}{5}-\frac{(x-1)^2}{5\cdot 2}+\frac{(x-1)^3}{5\cdot 3}-\cdots$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{5n}+\cdots;$$

11.3.6. $\frac{x-3}{1-3}+\frac{(x-3)^2}{2-3^2}+\frac{(x-3)^3}{3-3^3}+\cdots+\frac{(x-3)^n}{n-3^n}+\cdots;$

11.3.7. $\frac{x-1}{3}+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 3^2}+\frac{(x-1)^3}{3\cdot 3^3}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}+\cdots;$

11.3.8. $\frac{\ln 2}{2}x^2+\frac{\ln 3}{3}x^3+\frac{\ln 4}{4}x^4+\cdots+\frac{\ln (n+1)}{n+1}x^{n+1}$

$$+\cdots.$$

(B)

在题 11.3.9～11.3.12 中，利用逐项求导或逐项积分，求各幂级数的和函数，并求所给数项级数的和：

11.3.9. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

11.3.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$.

11.3.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

11.3.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

求题 11.3.13～11.3.16 中各幂级数的收敛区间：

11.3.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}x^n$.

11.3.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^{2n}$.

11.3.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}x^n$.

11.3.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}x^n$.

求题 11.3.17～11.3.19 中各级数的收敛域：

11.3.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^n}$.

11.3.18. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

11.3.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

11.3.20. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\ln 2$.

11.3.21. 计算 $2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{1}{8}}\cdot 16^{\frac{1}{16}}\cdot 32^{\frac{1}{32}}\cdots$.

11.3.22. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$ 的收敛区间，并求其和函数.

(C)

求题 11.3.23～11.3.26 中各幂级数的和函数：

11.3.23. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\cdots$.

11.3.24. $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{2(n-1)!!}+\cdots$.

11.3.25. $\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\cdots$.

11.3.26. $1\cdot 3x+2\cdot 4x^2+3\cdot 5x^3+\cdots+n(n+2)x^n+\cdots$.

四、函数展开成幂级数

(A)

将题 11.4.1～11.4.8 中各函数展开成 x 的幂级数，并求展开

式成立的区间：

11.4.1. $\frac{2x}{4-x^2}$.

11.4.2. $\operatorname{ch} x$.

11.4.3. $\cos^2 x$.

11.4.4. $\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

11.4.5. $\ln(1+x-2x^2)$.

11.4.6. $\frac{x}{1+x-2x^2}$.

11.4.7. $\int_0^x e^{-t^2} dt$.

11.4.8. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

将题 11.4.9～11.4.10 中各函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求展开式成立的区间：

11.4.9. $\frac{1}{x(1+x)}$.

11.4.10. $\ln \frac{x}{1+x}$.

(B)

将题 11.4.11～11.4.15 各函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

11.4.11. $\sqrt[3]{8-x^3}$.

11.4.12. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

11.4.13. $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

11.4.14. $\ln(1-x+x^2-x^3+x^4)$.

11.4.15. $x \arcsin x$.

11.4.16. 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1<x<1)$. 求 $F(x)=$

$\frac{f(x)}{1-x}$的展开式.

求题 11.4.17～11.4.18 中各幂级数的和函数：

11.4.17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2nx^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

11.4.18. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$.

求题 11.4.19～11.4.22 中各级数的和：

11.4.19. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

11.4.20. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

11.4.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$.

11.4.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

(C)

将题 11.4.23～11.4.27 中各函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

11.4.23. $e^x\sin x$.

11.4.24. $\arctan\frac{2x}{1-x^2}$.

11.4.25. $(\arctan x)^2$.

11.4.26. $(\arcsin x)^2$.

11.4.27. $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

11.4.28. 设 $x\in(0,1)$. 证明：

$$\sum_{k=1}^{n}x^k(1-x)^{2k}\leqslant\frac{4}{23}\ (n=1,2,\cdots).$$

五、函数的幂级数展开式的应用

(A)

在题 11.5.1～11.5.7 中，利用函数的幂级数展开式，求各数的近似值：

11.5.1. e^2（精确到 0.001）.

11.5.2. $\frac{1}{10.3}$（精确到 0.0001）.

11.5.3. $\frac{1}{\sqrt[3]{65}}$（精确到 0.0001）.

11.5.4. $\sqrt[5]{250}$（精确到 0.001）.

11.5.5. $\sqrt{\frac{25}{26}}$（精确到 0.0001）.

11.5.6. $\sin 1^\circ$（精确到 0.0001）.

11.5.7. $\cos 10^\circ$（精确到 0.0001）.

(B)

在题 11.5.8～11.5.10 中，利用被积函数的幂级数展开式，求各定积分的近似值：

11.5.8. $\int_0^{0.8} x^{10}\sin x\,dx$（精确到 0.0001）.

11.5.9. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$（精确到 0.0001）.

11.5.10. $\int_{0.1}^1 \frac{e^x}{x}dx$（取展开式的前六项计算近似值）.

(C)

11.5.11. 证明：$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

*六、函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质

(A)

判定题 11.6.1～11.6.5 中各函数序列在所给区间上的一致收敛性：

11.6.1. $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+nx}$ $(n=1,2,\cdots)$，$[0,1]$.

11.6.2. $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$ $(n=1,2,\cdots)$，$(0,1)$.

11.6.3. $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ $(n=1,2,\cdots)$，$[0,+\infty)$.

11.6.4. $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$，$(-\infty,+\infty)$.

11.6.5. $f_n(x)=(\sin x)^{\frac{1}{n}}$ $(n=1,2,\cdots)$，

$$[\delta,\pi-\delta]\ (0<\delta<\frac{\pi}{2}).$$

在题 11.6.6～11.6.10 中，判定各级数在所给区间上的一致收敛性：

11.6.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^n)x^n$，$[0,1]$.

11.6.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$，$(-\infty,+\infty)$.

11.6.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2}$，$(-\infty,+\infty)$.

11.6.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$，$(0,+\infty)$.

11.6.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n+x^2}$，$(-\infty,+\infty)$.

11.6.11. 证明：函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且具有连续导数.

(B)

在题 11.6.12～11.6.15 中，判定各级数在所给区间上的一致收敛性：

11.6.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$，$(-\infty, +\infty)$.

11.6.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n(n+x)}}$，$[0, +\infty)$.

11.6.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$，$[1+\alpha, +\infty)(\alpha>0)$.

11.6.15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$，$(-\infty, +\infty)$.

在题 11.6.16～11.6.18 中，证明各级数在所给区间上不一致收敛：

11.6.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$(-\infty, +\infty)$.

11.6.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\ln x$，$(0,1]$.

11.6.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$，$(0,2\pi)$.

(C)

11.6.19 证明：黎曼（Riemann）函数 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内连续，且具有连续导数.

七、傅里叶级数

(A)

11.7.1. 证明：

(1) $1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots$ 是 $[0, \pi]$ 上的正交系；

(2) $\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots$ 是 $[0, \pi]$ 上的正交系；

(3) $1, \cos \frac{\pi}{l}x, \sin \frac{\pi}{l}x, \cdots, \cos \frac{n\pi}{l}x, \sin \frac{n\pi}{l}x, \cdots$ 是 $[-l, l]$ $(l>0)$ 上的正交系.

11.7.2. 计算

$I=\int_{-\pi}^{5\pi}(\cos x \cos 2x \cos 4x+\sin x \sin 2x \sin 4x)\,dx$.

11.7.3. 若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上至多只有有限个第一类间断点及有限个极值点，且 $\varphi(-x)=\psi(x)$. 问 $\varphi(x)$ 的傅里叶系数 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$、$b_n(n=1,2,\cdots)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 $\alpha_n(n=0,1,2,\cdots)$、$\beta_n(n=1,2,\cdots)$ 之间有何关系？

11.7.4. 若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上至多只有有限个第一类间断点及有限个极值点，且 $\varphi(-x)=-\psi(x)$. 问 $\varphi(x)$ 的傅里叶系数 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$、$b_n(n=1,2,\cdots)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 $\alpha_n(n=0,1,2,\cdots)$、$\beta_n(n=1,2,\cdots)$ 之间又有何关系？

在题 11.7.5～11.7.11 中，将各函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：

11.7.5. $f(x)=2x^2$，$x\in[-\pi,\pi]$.

11.7.6. $f(x)=x^3$，$x\in[-\pi,\pi]$.

11.7.7. $f(x)=\cos\frac{x}{2}$，$x\in[-\pi,\pi]$.

11.7.8. $f(x)=e^{-x}+x$，$x\in[-\pi,\pi]$.

11.7.9. $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi\leqslant x<0,\\ 3x^2+1, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

11.7.10. $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$

11.7.11. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0, \\ 2, & 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ 3, & \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi. \end{cases}$

11.7.12. 将 $f(x)=\sin^4 x$ 展开成傅里叶级数.

11.7.13. 求三角多项式$\dfrac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$的傅里叶级数.

(B)

11.7.14. 将 $f(x)=e^x$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成傅里叶级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$ 的和.

11.7.15. 将 $f(x)=|\cos x|$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成傅里叶级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 的和.

11.7.16. 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续，试确定三角多项式

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

的系数 α_k $(k=0, 1, 2, \cdots, n)$ 及 β_k $(k=1, 2, \cdots, n)$，使得积分

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x$$

取得最小值

11.7.17. 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段连续、周期为 π，证明它的傅里叶系数 $a_{2n-1}=0, b_{2n-1}=0(n=1,2,\cdots)$.

11.7.18. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上至多只有有限个第一类间断点及有限个极值点. 应如何将 $f(x)$ 延拓到区间 $(-\pi,\pi)$ 内，使得它的傅里叶级数具有形式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

11.7.19. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上至多只有有限个第一类间断点及有限个极值点. 应如何将 $f(x)$ 延拓到区间 $(-\pi,\pi)$ 内，使得它的傅里叶级数具有形式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x$.

八、正弦级数和余弦级数

(A)

将题 11.8.1～11.8.2 中各函数展开成傅里叶级数：

11.8.1. $f(x)=\operatorname{sgn} x$， $x\in[-\pi,\pi]$.

11.8.2. $f(x)=\cos ax$， $x\in[-\pi,\pi](0<a<1)$.

将题 11.8.3～11.8.6 中各函数展开成正弦级数：

11.8.3. $f(x)=-\sin\frac{x}{2}+1$， $x\in[0,\pi]$.

11.8.4. $f(x)=\begin{cases}\frac{2h}{\pi}x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ 2h-\frac{2h}{\pi}x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

11.8.5. $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<h,\\ 0, & h\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

11.8.6. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$，$x\in[0,\pi]$.

将题 11.8.7～11.8.11 中各函数展开成余弦级数：

11.8.7. $f(x)=2x+3$，$x\in[0,\pi]$.

11.8.8. $f(x)=e^{2x}$，$x\in[0,\pi]$.

11.8.9. $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant h,\\ 0, & h<x\leqslant\pi.\end{cases}$

11.8.10. $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ x+1, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi.\end{cases}$

11.8.11. $f(x)=\begin{cases}-5, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 2x^2, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi.\end{cases}$

(B)

将题 11.8.12～11.8.13 中各函数展开成傅里叶级数：

11.8.12. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$.

11.8.13. $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

九、周期为 2l 的周期函数的傅里叶级数

(A)

在题 11.9.1～11.9.3 中，将各函数展开成傅里叶级数：

11.9.1. $f(x)=x^2-x$，$x\in[-2,2]$.

11.9.2. $f(x)=\cos\frac{\pi x}{l}$，$x\in\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right](l>0)$.

11.9.3. $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0,\\ x+1, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$

(B)

将题 11.9.4～11.9.5 中各函数展开成正弦级数：

11.9.4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{l}x, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2},\\ 1, & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$

11.9.5. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$

将题 11.9.6～11.9.7 中各函数展开成余弦级数：

11.9.6. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\dfrac{1}{2},\\ 0, & \dfrac{1}{2}<x<1.\end{cases}$

11.9.7. $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{l}, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2},\\ 0, & \dfrac{l}{2}<x<l.\end{cases}$

*十、傅里叶级数的复数形式

(B)

在题 11.10.1～11.10.2 中，将各函数展开成复数形式的傅里叶级数：

11.10.1. $f(x)=e^{2x}$，$x\in(-\pi,\pi)$.

11.10.2. $f(x)=\operatorname{ch} x$，$x\in(-\pi,\pi)$.

第十二章　微分方程

一、微分方程的基本概念

(A)

12.1.1. 指出下列各微分方程的阶数．并说出哪些是线性微分方程：

(1) $y''' + 9y'' + 9y = 4x^2 + 1$;

(2) $(x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$;

(3) $(y'')^2 + 6(y')^4 - y^5 + x^7 = 0$;

(4) $x(y')^2 - 3yy' + x = 0$;

(5) $\sin(y''') + e^y = x$;

(6) $y^{(7)} + \sin(x + y) = y'' + 6y$.

判断 12.1.2～12.1.4 各题中所给函数是否为所给微分方程的解：

12.1.2. $\dfrac{dy}{dt} = -y\cot\dfrac{t}{2}, y = \dfrac{C}{1 - \cos t}$.

12.1.3. $y'' = x^2 + y^2, y = \dfrac{1}{x}$.

12.1.4. $y'' = 1 + y'^2, y = -\ln\cos(x + C_1) + C_2$.

验证 12.1.5～12.1.7 各题中所给函数为所给微分方程的解：

12.1.5. $(x - y + 1)y' = 1, y = x + Ce^y$.

12.1.6. $y'' - 2y' + y = 0, y = 2xe^x$.

12.1.7. $(1 + xy)y' + y^2 = 0, \begin{cases} x = te^t, \\ y = e^{-t}. \end{cases}$

求 12.1.8～12.1.11 各题中，以所给的含有任意常数的函数（其中 C_1、C_2、C 都为任意常数）为通解的微分方程：

12.1.8. $(x-C)^2+y^2=4$.

12.1.9. $y=\sqrt{x^2+y^2}+C$.

12.1.10. $y=C_1x+C_2x^2$.

12.1.11. $y=Ce^{\arcsin x}$.

确定 12.1.12～12.1.14 各题的函数关系式中所含的参数，使函数满足所给的初始条件：

12.1.12. $x^2-2y^2=C$，$y|_{x=0}=3$.

12.1.13. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$，$y|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$，$y'|_{x=\frac{\pi}{2}}=2$.

12.1.14. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3e^{2x}$，

$$y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1, y''|_{x=0}=-2.$$

(B)

12.1.15. 所有对称轴平行 y 轴的抛物线组成一曲线族，试求此曲线族满足的微分方程.

12.1.16. 已给曲线族

$$\{Cx^2+y^2=1 \mid C\in\mathbb{R}\},$$

试求族中所有曲线都满足的微分方程，并画出该曲线族的图形.

12.1.17. 试求以 $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=C_3^2$ 为通解的微分方程，其中 C_1、C_2、C_3 都为任意常数.

二、可分离变量的微分方程

(A)

求 12.2.1～12.2.5 各题中的微分方程的通解：

12.2.1. $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$.

12.2.2. $x\sec y\,dx+(x+1)dy=0$.

12.2.3. $y'=1+x+y^2+xy^2$.

12.2.4. $(1+x)\mathrm{d}y+(1-2\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}x=0$.

12.2.5. $y'=\dfrac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}$.

求题 12.2.6～12.2.9 中各初值问题的解：

12.2.6. $(1+\mathrm{e}^x)yy'=\mathrm{e}^x, y|_{x=1}=1$.

12.2.7. $(1+x^2)y'=\arctan x, y|_{x=0}=0$.

12.2.8. $\dfrac{x}{1+y}\mathrm{d}x-\dfrac{y}{1+x}\mathrm{d}y=0, y|_{x=0}=1$.

12.2.9. $y'\sin x+y\cos x=0, y|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$.

(B)

12.2.10. 求微分方程 $1+y'=\mathrm{e}^y$ 的通解.

12.2.11. 求一曲线的方程，该曲线通过点(0,1)，且曲线上任一点处的切线垂直于此点与原点的连线.

12.2.12. 已知一曲线通过点(2,0)，且在切点与 y 轴间的切线段有定长 2，求此曲线的方程.

12.2.13. 一曲边梯形的曲边方程为 $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$，底边位于区间$[0,x]$上，其面积与 $f(x)$的$(n+1)$次幂成正比$(n>0)$，又 $f(0)=0, f(1)=1$，求 $f(x)$.

12.2.14. 设曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)$所确定，在曲线上有一定点(r_0,θ_0)及动点(r,θ)，这两点的向径与曲线围成一扇形，已知该扇形面积与动点的极坐标 r,θ 的乘积 $r\theta$ 成正比，求该曲线的方程.

12.2.15. 设曲线 l_1 及 l_2 都过点(1,1)，且 l_1 上的点的纵坐标 y 与横坐标 x 之比关于 x 的变化率等于 2，l_2 上的点的纵坐标 y 与横坐标 x 之乘积关于 x 的变化率也等于 2，求曲线 l_1 与 l_2 所围图形的面积.

12.2.16. 设函数 $f(x)$可导，对任何实数 x,h 满足 $f(x)\neq 0$ 和

$$f(x+h)=\int_x^{x+h}\frac{t(t^2+1)}{f(t)}\mathrm{d}t+f(x),$$

且 $f(1)=\sqrt{2}$，求 $f(x)$.

12.2.17. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 可导，满足 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$，且 $f(0)=0$，$g(x)\neq 0$，又设 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，试导出 $\varphi(x)$ 所满足的微分方程，并求 $\varphi(x)$.

(C)

12.2.18. 以 yOz 坐标面上的一段光滑曲线 $y=f(z)$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面和 xOy 坐标面围成一个无盖容器，已知它的底面积为 $16\pi\ \mathrm{cm}^2$，当以 $3\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ 的流量把水注入容器时，水面的面积以 $\pi\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$ 的速率增大，试求曲线 $y=f(z)$ 的方程.

12.2.19. 设曲线上任意两点的向径和这两点间的弧段所构成的扇形的面积在数值上等于这段弧长的一半. 求此曲线的方程.

三、齐 次 方 程

(A)

求 12.3.1～12.3.6 各题中所给微分方程的通解：

12.3.1. $xy'-x\sin\dfrac{y}{x}-y=0$.

12.3.2. $(x+y)y'+(x-y)=0$.

12.3.3. $y'=\dfrac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$.

12.3.4. $xy'+y=2\sqrt{xy}$.

12.3.5. $y'=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$.

12.3.6. $(x+y\cos\frac{y}{x})\mathrm{d}x-x\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0$.

求 12.3.7～12.3.10 各题中所给各微分方程初值问题的解：

12.3.7. $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}, y|_{x=-1}=2$.

12.3.8. $(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0, y|_{x=1}=0$.

12.3.9. $\frac{y-xy'}{x+yy'}=2, y(1)=1$.

12.3.10. $xy'+y\tan\frac{y}{x}-y=0, y|_{x=2}=\frac{\pi}{3}$.

(B)

用变换 $X=x+h, Y=y+k$ 把 12.3.11～12.3.12 各题中所给方程化为齐次方程，并求其通解：

*12.3.11. $y'=\frac{2y-x-5}{2x-y+4}$.

*12.3.12. $y'=\frac{y-x+1}{y+x+5}$.

用适当的变量代换将 12.3.13～12.3.16 各题中所给方程化为可分离变量的方程，并求其通解：

12.3.13. $y'=\frac{1}{(x+y)^2}$.

12.3.14. $(x-2\sin y+3)\mathrm{d}x+(2x-4\sin y-3)\cos y\mathrm{d}y=0$.

12.3.15. $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x+\sin(x+y)=0$.

12.3.16. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{2x}+\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$.

(C)

用适当的变量代换求 12.3.17～12.3.19 各题中的微分方程的通解：

12.3.17. $y^3\mathrm{d}x+2(x^2-xy^2)\mathrm{d}y=0$.

12.3.18. $(y^4-3x^2)\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}x=0$.

12.3.19. $y'=\frac{2x^3+3xy^2-7x}{3x^2y+2y^3-8y}$.

四、一阶线性微分方程

(A)

求 12.4.1～12.4.6 各题中的线性微分方程的通解：

12.4.1. $y'\cos^2x+y=\tan x$.

12.4.2. $y'\cos x+y\sin x=1$.

12.4.3. $(x^2+1)y'+2xy=4x^2$.

12.4.4. $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$.

12.4.5. $xy'-y=x^2e^{x-\frac{1}{x}}$.

12.4.6. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.

求 12.4.7～12.4.10 各题中的微分方程初值问题的解：

12.4.7. $xy'+y=e^x, y|_{x=a}=6$.

12.4.8. $(1-x^2)y'+xy=1, y|_{x=0}=1$.

12.4.9. $x^2y'+(1-2x)y=x^2, y|_{x=1}=0$.

12.4.10. $xy'+2y=\sin x, y|_{x=\pi}=\frac{1}{\pi}$.

求 12.4.11～12.4.14 各题中的伯努利方程的通解：

12.4.11. $\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{1-x^2}=xy^{-\frac{1}{2}}$.

12.4.12. $xyy'-y^2+3x^3\cos x=0$.

12.4.13. $3x(1-x^2)y^2y'+(2x^2-1)y^3=ax^3$.

12.4.14. $y'=x^3y^3-xy$.

(B)

求 12.4.15～12.4.17 各题中的微分方程的通解：

12.4.15. $y'(2x-y^2)=1$.

12.4.16. $(x-2xy-y^2)\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x=0$.

12.4.17. $(y^3x^2+xy)y'=1$.

求 12. 4.18～12.4.20 各题中的微分方程初值问题的解：

12.4.18. $y'(x\cos y+\sin 2y)=1, y|_{x=1}=0$.

12.4.19. $y'\cos y+\sin y=x, y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$.

12.4.20. $(2x+1)e^y y'+2e^y=4, y|_{x=0}=0$.

12.4.21. 设函数 $f(x)$ 可微且满足关系式

$$\int_0^x [2f(t)-1]\mathrm{d}t=f(x)-1,$$

求 $f(x)$.

12.4.22. 已知一曲线通过点 $(e,1)$，且在曲线上任一点 (x,y) 处的法线的斜率等于 $\frac{-x\ln x}{x+y\ln x}$，求这曲线的方程.

(C)

求 12.4.23～12.4.24 各题中的微分方程的通解：

12.4.23. $xy'\ln x\sin y+\cos y(1-x\cos y)=0$.

12.4.24. $y'+xy^2-x^3y-2x=0$.

12.4.25. 求微分方程 $y'=\frac{ay+x+1}{x}$ 的通解（a 为常数）.

12.4.26. 质量为 M_0 克的雨滴在下落过程中，由于不断蒸发，使雨滴的质量以每秒 m 克的速率减少，且所受空气阻力和下落速度成正比，若开始下落时雨滴速度为零，试求雨滴下落的速度与时间的关系.

12.4.27. 设 $P(x,y)=[x\alpha(x)+\beta(x)]y^2+3x^2y$,

$$Q(x,y)=y\alpha(x)+\beta(x),$$

$$\mathrm{d}U(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中 $\alpha(x)$、$\beta(x)$ 为可微函数，且 $\alpha(0)=-1, \beta(0)=0$. 试确定 $\alpha(x)$ 及 $\beta(x)$，并求函数 $U(x,y)$.

12.4.28. 设函数 $f(x)$ $(x\geqslant 1)$ 可微，且 $f(x)>0$. 将曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1$，$x=\beta$ $(1<\beta<+\infty)$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所得立体的体积记为 $v(\beta)$，设对于适合 $1<\beta<+\infty$ 的一切 β，恒有 $v(\beta)=\frac{\pi}{3}[\beta^2 f(\beta)-f(1)]$，且 $f(2)=\frac{2}{9}$. 求 $f(x)$.

五、全微分方程

(A)

求 12.5.1～12.5.3 各题中的微分方程的通解：

12.5.1. $[\cos(x+y^2)+3y]\mathrm{d}x+[2y\cos(x+y^2)+3x]\mathrm{d}y=0$.

12.5.2. $y'(\cos y-\sin\alpha\sin x)\cos y+(\cos x-\sin\alpha\sin y)\cos x=0$.

12.5.3. $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$.

(B)

利用下列微分公式

$$\mathrm{d}(x\pm y)=\mathrm{d}x\pm\mathrm{d}y,\qquad \mathrm{d}(xy)=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2},\qquad \mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

$$\mathrm{d}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

求 12.5.4～12.5.8 各题中的方程的通解：

12.5.4. $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0$.

12.5.5. $\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{5/2}}=0$.

12.5.6. $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = (x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

12.5.7. $\left(x^m + 2xy^2 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(y^n + 2x^2y + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = 0$.

其中 m、n 为自然数.

12.5.8. $\left(x + \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x + \left(1 - \frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right)\mathrm{d}y = 0$.

利用观察法求出 12.5.9～12.5.12 各题中的微分方程的积分因子，并求其通解：

12.5.9. $y\mathrm{d}x - (x+y^3)\mathrm{d}y = 0$.

12.5.10. $(x^4\mathrm{e}^x - 2mxy^2)\mathrm{d}x + 2mx^2y\mathrm{d}y = 0$.

12.5.11. $y(2xy+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x - \mathrm{e}^x\mathrm{d}y = 0$.

12.5.12. $(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)(y+1) + x^2y^2\mathrm{d}y = 0$.

求 12.5.13～12.5.15 各题中的微分方程的积分因子，并求其通解：

12.5.13. $(y^2-3x^2)\mathrm{d}y + 2xy\mathrm{d}x = 0$.

12.5.14. $y' = \mathrm{e}^{2x} + y - 1$.

12.5.15. $(x\cos y - y\sin y)\mathrm{d}y + (x\sin y + y\cos y)\mathrm{d}x = 0$.

(C)

12.5.16. 求微分方程 $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = (x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{d}x$ 的积分因子，并求其通解.

12.5.17. 求解初值问题

$$\begin{cases}(5xy-3y^3)\mathrm{d}x + (3x^2-7xy^2)\mathrm{d}y = 0,\\ y|_{x=1} = 4.\end{cases}$$

*六、欧拉-柯西近似法

(A)

求 12.6.1～12.6.3 各题中所给微分方程初值问题在指定区

间上的近似解(把区间 5 等分，计算到三位小数)：

12.6.1. $y'=y, y|_{x=0}=0.5$，在$[0,0.5]$上.

12.6.2. $y'=x+y, y|_{x=0}=1$，在$[-0.5,0]$上.

12.6.3. $y'=3x+y^2, y|_{x=0}=1$，在$[0,0.1]$上.

七、可降阶的高阶微分方程

(A)

求 12.7.1～12.7.5 各题中的微分方程的通解：

12.7.1. $y''=\arctan x$.

12.7.2. $y''+\sqrt{1-y'^2}=0$.

12.7.3. $y''+\frac{2}{1-y}y'^2=0$.

12.7.4. $y'y'''=3(y'')^2$.

12.7.5. $y''=e^y$.

求 12.7.6～12.7.8 各题中的微分方程初值问题的解：

12.7.6. $2y''=\sin 2y, y|_{x=0}=\frac{\pi}{2}, y'|_{x=0}=1$.

12.7.7. $y''=2y^3, y|_{x=0}=y'|_{x=0}=1$.

12.7.8. $yy''=2(y'^2-y'), y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$.

12.7.9. 设一物体质量为 m，以初速 v_0 从一斜面上滑下，若斜面的倾角为 α，摩擦系数为 μ，试求物体在斜面上滑动的距离与时间的函数关系.

(B)

求 12.7.10～12.7.13 各题中的微分方程的通解：

12.7.10. $yy''-(y')^2=y^2\ln y$.

12.7.11. $y''+(y')^2=2e^{-y}$.

12.7.12. $(y'')^2-2y'y'''+1=0$.

12.7.13. $xyy''+xy'^2-yy'=0$.

12.7.14. 证明曲率半径等于常数的曲线是圆周.

(C)

12.7.15. 求方程 $y'y''=(y')^3\tan y+\sec^2 y$ 的通解.

12.7.16. 物体在重力作用下沿平面曲线 C 无摩擦地滑下(如图 12-1,其中 y 轴负向为重力的方向),其下降速率 $v_y=-a(a>0$ 为常数). 已知曲线 C 通过原点,且在原点处的曲线的切线斜率为 -1. 求曲线 C 的方程.

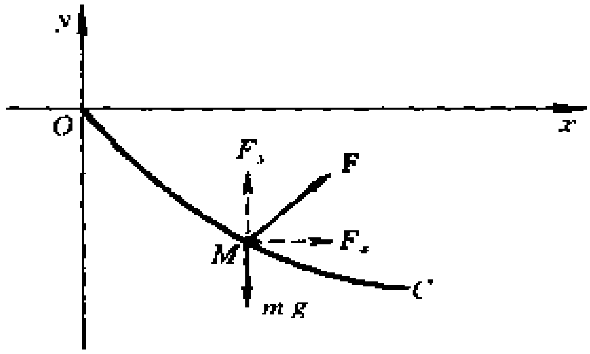


图 12-1

八、高阶线性微分方程

(A)

12.8.1. 判断下列各组函数是否线性相关:

(1) $e^{2x},5e^{2x}$;　　(2) e^{-x},xe^{-x};

(3) $0,x,e^x$;　　(4) $x,x+3$;

(5) $e^x,\sin x$;　　(6) $\sin 2x,3\sin x\cos x$;

(7) x,x^2,x^3;　　(8) e^{3x},e^{-3x},e^x.

12.8.2. 证明:$1,x,x^2,\cdots,x^n$在任何区间上线性无关.

(B)

*12.8.3. 设 $y_1(x)=x^3, y_2(x)=|x^3|$，问 y_1, y_2 在区间$[-1, 1]$上是否线性相关，并求 $W[y_1, y_2]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

12.8.4. 设 $y_1^*(x), y_2^*(x), y_3^*(x)$是某个二阶非齐次线性微分方程的三个解，且 $y_1^*(x), y_2^*(x), y_3^*(x)$线性无关，证明该微分方程的通解为

$$y=C_1y_1^*+C_2y_2^*+(1-C_1-C_2)y_3^*.$$

12.8.5. 已知 $y=e^x$ 是方程 $y''-2y'+y=0$ 的解，求此方程的通解.

*12.8.6. 已知方程 $y''+y=0$ 的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$，求方程 $y''+y=\tan x$ 的通解.

*12.8.7. 设 $y_1(x), y_2(x)$是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个解，$W(x)=W[y_1(x), y_2(x)]=y_1y_2'-y_1'y_2$. 证明：

(1) $W(x)$满足方程 $W'+P(x)W=0$.

(2) $W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}P(x)\mathrm{d}x}$.

12.8.8. 已知 $y=x$ 是方程 $x^2y''+xy'-y=0$ 的解，求方程的通解.

12.8.9. 已知 $y=e^x$ 是方程 $xy''-(2x-1)y'+(x-1)y=0$ 的解，求方程的通解.

*12.8.10. 已知 $y=x$ 是方程

$$x^2(x+1)y''-x(2+4x+x^2)y'+(2+4x+x^2)y=-x^4-2x^3$$

所对应的齐次方程的一个解，求非齐次方程的通解.

*12.8.11. 已知 $y=\frac{1}{x}$是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 所对应的齐次方程的一个解，求非齐次方程的通解.

九、高阶常系数线性微分方程及常系数线性微分方程组

(A)

求 12.9.1～12.9.6 各题中所给微分方程的通解：

12.9.1. $3y''-2y'-8y=0$.

12.9.2. $y^{(4)}+4y=0$.

12.9.3. $y^{(4)}-5y'''+6y''+4y'-8y=0$.

12.9.4. $y'''-6y''+3y'+10y=0$.

12.9.5. $y^{(5)}+2y'''+y'=0$.

12.9.6. $y^{(4)}-2y'''+2y''-2y'+y=0$.

求 12.9.7～12.9.9 各题中的初值问题的解：

12.9.7. $y''+2y'+10y=0, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$.

12.9.8. $y'''-y'=0, y|_{x=0}=3, y'|_{x=0}=-1, y''|_{x=0}=1$.

12.9.9. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-3x=0, x|_{t=0}=0, x'|_{t=0}=1$.

求 12.9.10～12.9.14 各题中所给微分方程的通解：

12.9.10. $y''+y=(x-2)e^{3x}$.

12.9.11. $y''+y'-2y=8\sin 2x$.

12.9.12. $y''-7y'+10y=20x+18e^{x}-3e^{-5x}$.

12.9.13. $y'''-3y'-2y=-8x^3$.

12.9.14. $y^{(4)}-2y'''+y''=x$.

求 12.9.15～12.9.17 各题中的微分方程初值问题的解：

12.9.15. $y''+2y'+y=xe^{x}, y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$.

12.9.16. $y''+9y=\cos x, y|_{x=\frac{\pi}{2}}=y'|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$.

12.9.17. $y'''+2y''+y'+2e^{-2x}=0$,

$y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=y''|_{x=0}=1$.

12.9.18. 已知方程 $y''+9y=0$ 的一条积分曲线通过点 $(\pi,-1)$，且在该点和直线 $y+1=x-\pi$ 相切，求这条曲线.

(B)

12.9.19. 某介质中一单位质量的质点 P 受一力的作用沿水平直线运动，该力的大小与质点 P 到原点 O 的距离成正比（比例系数为 4），介质阻力与运动速度的大小成正比（比例系数为 3），求该质点的运动规律（运动开始时，质点 P 静止，与原点 O 相距 1cm）.

12.9.20. 一质量为 m 的质点由静止（$t=0,v=0$）开始沉入液体，下沉时液体阻力的大小与下沉速度的大小成正比，求此质点的运动规律.

12.9.21. 设一质点沿直线运动，其加速度 $a=5\cos 2t-9s$，求下列两种情形下质点的运动规律 $s(t)$.

(1) 该质点由原点出发且初速度为零；

(2) 该质点由原点出发，其初速度为 $v=6$.

求 12.9.22～12.9.23 各题中所给欧拉方程的通解：

*12.9.22. $x^2y''-4xy'+6y=x$.

*12.9.23. $\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}=-a$.

求 12.9.24～12.9.27 各题中所给微分方程组的通解：

*12.9.24. $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}.\end{cases}$

*12.9.25. $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+3x=\mathrm{e}^{-t},\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-4\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3y=\sin 2t.\end{cases}$

$$^*12.9.26.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+y=0,\\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=3x+y,\\ x|_{t=0}=1,\ y|_{t=0}=1.\end{cases}$$

$$^*12.9.27.\ \begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}-x=0,\\ \dfrac{dx}{dt}+y=0,\\ x|_{t=0}=1,\ y|_{t=0}=0.\end{cases}$$

12.9.28. 长为 6 m 的链条自桌上无摩擦地向下滑动，假定在 $t=0$时，链条自桌上垂下部分为 3 m，初速为零，试问链条全部滑过桌面需要多少时间（桌面上的链条成直线，且与桌边垂直）?

求 12.9.29～12.9.30 各题中所给微分方程的通解：

*12.9.29. $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+4y=0$.

*12.9.30. $(x+2)^2\dfrac{d^3y}{dx^3}+(x+2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=1$.

12.9.31. 证明：若 $f(x)$满足方程 $f'(x)=f(1-x)$，则必满足方程 $f''(x)+f(x)=0$，并求方程 $f'(x)=f(1-x)$的通解.

12.9.32. 若曲线 $y=f(x)$是方程 $y'''+2y''-3y'+4e^x=0$ 的一条积分曲线，此曲线通过点 $A(0,1)$，且在点 A 处的切线的倾角为$\dfrac{3}{4}\pi$，而曲率为零，求曲线 $y=f(x)$的方程.

12.9.33. 已知函数 $f(x)$连续，函数 $\varphi(x)$可微且满足：

$$\begin{cases}\varphi(x)+\displaystyle\int_2^x f(t)dt=-(x^2+x),\\ f(x)\cdot\varphi'(x)=x^2+x-2.\end{cases}$$

求 $f(x)$及 $\varphi(x)$.

十、微分方程的幂级数解法

(A)

用幂级数求 12.10.1～12.10.5 各题中的微分方程的解：

12.10.1. $y'=x+y$.

12.10.2. $y'-y=e^x$.

12.10.3. $y''+\frac{y}{1-x}=0$.

12.10.4. $y'=2x+\sin y, y|_{x=0}=\frac{\pi}{2}$.

12.10.5. $xy''+y'+xy=0, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$.

十一、杂　　题

(B)

12.11.1. 焦距为 $2c$、焦点相同的椭圆组成一曲线族，求此曲线族所满足的微分方程.

求 12.11.2～12.11.10 各题中所给微分方程的通解：

12.11.2. $3e^x\tan y\mathrm{d}x+(1-e^x)\sec^2 y\mathrm{d}y=0$.

12.11.3. $\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+1=2x^2$.

12.11.4. $y'+x=\sqrt{x^2+y}$.

12.11.5. $y'=\frac{2x+4y+3}{x+2y+1}$.

12.11.6. $y'-e^{x-y}+e^x=0$.

12.11.7. $yy'\sin x=\cos x(\sin x-y^2)$.

12.11.8. $y'\sin y+\cos y+x=0$.

12.11.9. $y'+x(y-x)+x^3(y-x)^2=1$.

12.11.10. $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$.

求 12.11.11～12.11.12 各题中的初值问题的解：

12.11.11. $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}, y|_{x=0}=1$.

12.11.12. $y'\cos x=y\sin x+\cos^2x, y|_{x=\pi}=1$.

12.11.13. 求可微函数 $y=y(x)$，使 $\int_0^x xydx = x^2 + y$.

12.11.14. 已知曲线的切线在纵轴上的截距等于切点处的横坐标 x，求此曲线的方程.

12.11.15. 一飞机从地面起飞后，其上升速度为 $\left(0.21-\frac{3h^2}{2800}\right)$ km/s，其中 h 表示飞机与地面的距离，求 h 与时间 t 的函数关系.

12.11.16. 求一曲线，该曲线上任一点处的切线、两坐标轴和过切点且平行于纵轴的直线所围成的梯形面积等于常数 $3a^2$，且通过点 $(a,2a)$ $(a>0)$.

12.11.17. 质量为 m 的物体，在倾角为 α 的斜面上下滑（初速 $v_0=0$），摩擦力为 k_1v+k_2p，其中 v 为物体运动的速度，p 为物体对斜面的正压力（k_1,k_2 为常数），求该物体的运动速度与时间 t 的函数关系.

求 12.11.18～12.11.20 各题中所给微分方程的通解：

12.11.18. $x^2y''=y'^2+2xy'$.

12.11.19. $y''=\frac{1}{\sqrt{ay}}$ $(a>0)$.

12.11.20. $y''+\frac{a^2}{y^2}=0$.

12.11.21. 为使人造卫星能摆脱地球引力，绕太阳运行，试问人造卫星在发射时，必须达到的最小速度应为多少？（地球半径 $R=6.370\times10^6$ m）.

12.11.22. 一质量为 m 的质点，以初速 v_0 铅直上抛，空气阻力等于 kv^2（常数 $k>0$），求质点到达最高点所需的时间.

12.11.23. 设一曲线 $y=f(x)$ 过点 $(2,5)$，以 $[1,x]$ $(x>1)$ 为底、该曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积等于以 $[1,x]$ 为底而高为 $f(x)$ 的矩形面积的 1/3. 求该曲线方程.

12.11.24. 设函数 $f(x)$ 可微，且满足关系式

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t+f^2(t)}\mathrm{d}t=f(x)-1.$$

试求 $f(x)$.

12.11.25. 设有长度为 l 的弹簧，其上端固定. 现用五个质量都为 m 的重物同时挂在弹簧的下端，使弹簧伸长了 $5a$. 然后突然取去其中的一个重物，使其余四个重物由静止状态开始振动，试求所挂重物的运动规律.

12.11.26. 一单摆长为 l，摆锤的质量为 m，假设它摆动之偏角很小(即 $\sin\theta\approx\theta$). 试求摆锤的运动方程，并确定其运动周期.

12.11.27. 在电感、电阻串联的电路中，设外加电动势为 E，电感值为 L，电阻值为 R，已知电流 $i=i(t)$ 满足方程

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=E(t).$$

(1) 当 $E=E_0$ 时，求满足初始条件 $i|_{t=0}=0$ 的电流 $i(t)$；

(2) 当 $E=E_0\sin\omega t$ 时，求满足初始条件 $i|_{t=0}=0$ 的电流 $i(t)$.

12.11.28. 如图 12-2 所示，当电路中的开关合上后. 试利用

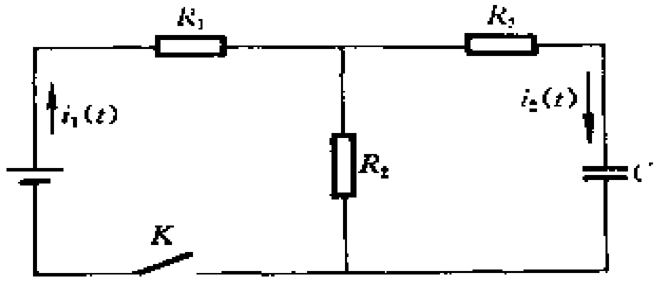


图 12-2

微分方程求出右边支路中的电流 $i_2(t)$.

12.11.29. 已知可微函数 $\varphi(x)$满足 $\varphi(1)=0,\varphi'(1)=0$,且使方程

$$[3x^3-2\varphi(x)]y\mathrm{d}x-[x^2\varphi'(x)+\sin y]\mathrm{d}y=0.$$

为全微分方程. 试确定 $\varphi(x)$,并求上述方程满足 $y|_{x=1}=\frac{\pi}{2}$ 的特解.

(C)

12.11.30. 已知微分方程 $y'+y=g(x)$,其中

$$g(x)=\begin{cases}x, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2, 1<x<+\infty.\end{cases}$$

试求一个在$[0,+\infty)$上连续的函数 $y=y(x)$,它满足初始条件 $y(0)=0$,且在$(0,1)$及$(1,+\infty)$内满足所给方程.

12.11.31. 设一车间的空间容积为 $30\times30\times12\ \mathrm{m}^3$,空气中含有 0.12%的 CO_2(以容积计算),现将新鲜空气(其中 CO_2 的含量为 0.04%)输入车间,问每分钟应输入多少新鲜空气,才能在输入 10 分钟后使车间空气中的 CO_2 的含量不超过 0.06%(假定输入空气与原有空气很快混合均匀后,以与输入新鲜空气相同的流量排出).

12.11.32. 求满足方程$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$的可微函数 $f(x)$.

12.11.33. 设 $f'(\cos x+2)=\sin^2x+\tan^2x$,求 $f(x)$.

12.11.34. 求解微分方程初值问题:

$$\begin{cases}y'-2xy+2y^2\mathrm{e}^{-x^2}=0,\\ y|_{x=0}=y_0.\end{cases}$$

其中 $y_0\neq0$.

12.11.35. 求方程$(x^2-y^2-2y)\mathrm{d}x+(x^2+2x-y^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

12.11.36. 设连续函数 $f(x)$满足$\int_0^1 f(\alpha x)\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2}f(x)+1$,

求 $f(x)$.

12.11.37. 一圆柱形的桶内有 40 L(升)盐溶液，其质量浓度含溶解盐为 20 g/L，现将浓度为 30 g/L 的盐溶液以 4 L/min 的流量注入桶内，假定搅拌均匀后的混合物也以 4 L/min 的流量流出，试问经 20 min(分)后，桶内含有盐量多少.

12.11.38. 设当 $x>-1$ 时，可微函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0, f(0)=1.$$

证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

12.11.39. 设一条曲线位于直角坐标系中的 x 轴上方且向上凹，其上任一点 $M(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 MN 的长度的倒数(N 是法线与 x 轴的交点)，又曲线在点(1,1)处的切线与 x 轴平行，求该曲线的方程.

12.11.40. 设 $u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$f(r)$ 二阶可微，$f(1)=f'(1)=1$. 试将方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ 化为常微分方程并求 $f(r)$.

12.11.41. 设有方程 $y''+(x+e^{2y})y'^3=0$. 若把 x 看成因变量，y 看成自变量，则此方程化为何种形式？并求此方程的通解.

12.11.42. 设二阶可微函数 $f(x)$ 满足关系式

$$\int_0^x (x+1-t)f'(t)\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x),$$

求 $f(x)$.

12.11.43. 位于坐标原点的我舰向位于 Ox 轴上 A 点处的敌舰发射鱼雷，鱼雷运行方向始终对准敌舰. 设敌舰以速率 v_0 沿平行于 Oy 轴的直线方向行驶，而鱼雷的速率为 $5v_0$，求鱼雷运行的轨迹，并问敌舰行驶离 A 多远的路程时，将被鱼雷击中(为计算方便，设 OA 的距离为 1 个单位).

12.11.44. 一抛射体在介质中运动，介质阻力 $\boldsymbol{R}=-R(t)\boldsymbol{v}$，已知抛射体运动的水平距离与时间 t 的关系是 $x=f(t)$ 且

$f'(t)\neq 0$. 证明:抛射体运动的铅直距离由

$$y(t)=-gf(t)\int\frac{\mathrm{d}t}{f'(t)}+g\int\frac{f(t)}{f'(t)}\mathrm{d}t+Af(t)+B$$

确定,其中 A、B 为常数,g 为重力加速度.

12.11.45. 设 $f(x)$是可微函数且对任何 x、y 恒有

$$f(x+y)=\mathrm{e}^{y}f(x)+\mathrm{e}^{x}f(y),$$

又 $f'(0)=2$. 求 $f'(x)$与 $f(x)$的关系式,并求 $f(x)$.

12.11.46. 作变换 $t=\tan x$,把方程

$$\cos^4 x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2(1-\sin x\cos x)\cos^2 x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\tan x$$

变换成 y 关于 t 的方程,并求原方程的通解.

答案与提示

第　一　章

一（第1页）

1.1.1. $\varphi(t^2)=t^6+1$，$[\varphi(t)]^2=t^6+2t^3+1$.

1.1.2. $f(x+\Delta x)-f(x)=-\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

1.1.6. $\varphi(3)=2$，$\varphi(2)=1$，$\varphi(0)=2$，$\varphi(0.5)=2$，

$\varphi(-0.5)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1.1.7. $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$ $(x>0)$.

1.1.8. (1) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$；　(2) $[-1,0)\cup(0,1]$；

(3) $[0,2)\cup(2,+\infty)$；

(4) $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$；

(5) $(-\infty,0)\cup(0,2]$.

1.1.9. (1) 不表示同一函数，因为定义域不同；

(2) 不表示同一函数，因为定义域不同；

(3) 不表示同一函数，因为对应法则不同；

(4) 不表示同一函数，因为定义域不同；

(5) 表示同一函数，因为定义域与对应法则都相同.

1.1.13. (1) 偶函数；(2) 非奇非偶函数；(3) 奇函数；

(4) 奇函数.

1.1.14. (1) 奇函数；　(2) 偶函数；(3) 非奇非偶函数；

(4) 偶函数.

1.1.15. (1) 周期为 1 的周期函数.

1.1.16. (1) $y=x^3-1$； (2) $y=x+\sqrt{x^2-1}$.

1.1.18. 提示：利用数学归纳法.

1.1.19. 提示：利用伯努利 (Bernoulli) 不等式.

1.1.22. $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant2$. 提示：方程等价于函数

$$f(x)\cdot g(x)\geqslant0.$$

1.1.23. $f(1996)=1$.

1.1.24. $f(x)=x^2-x, z=(x-y)^2+2y$.

1.1.25. $f(x)=x^2, f_n(x)=x^{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$.

1.1.26. $f(x)$的周期是 $2(b-a)$.

1.1.27. 提示：利用二次三项式：

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)x+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\geqslant0.$$

1.1.28. 提示：(1) 当 $n=2^k(k\in\mathbb{N}_+)$时，反复利用不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ 证明；当 $n\neq2^k(k\in\mathbb{N}_+)$时，取 $m,k\in\mathbb{N}_-$，使得 $m+n=2^k$，并取 $\bar{a}=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，由

$$\sqrt[m+n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n\cdot(\bar{a})^m}\leqslant\frac{1}{m+n}(a_1+a_2+\cdots+a_n+m\bar{a}),$$

得
$$(a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

(2) 对$\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}$利用(1)的结果.

1.1.32. 提示：将 x 换成$\frac{1}{x}$，得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx.$$

解方程组得 $f(x)=\frac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\frac{a}{x}\right)$为奇函数.

二（第 5 页）

1.2.1. (1) $[-2,0)\cup(0,1)$； (2) $(1,+\infty)$；

(3) $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$；

(4) $x>0$ 且 $x\neq(n\pi)^2$ $(n\in\mathbb{N}_+)$； (5) $\varnothing$；

(6) $(2k\pi,(2k+1)\pi)(k\in\mathbb{Z})$.

1.2.3. (1) 非奇非偶函数；(2) 奇函数； (3) 奇函数；

(4) 偶函数.

1.2.4. (1) 非周期函数； (2) 非周期函数；

(3) 周期为 2π； (4) 周期为 π.

1.2.5. (1) 周期为 π； (2) 周期为 $\frac{\pi}{2}$； (3) 周期为 30π.

1.2.6. (1) $[-1,0]$； (2) $\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,(n+1)\pi\right](n\in\mathbb{Z})$；

(3) $\left[-\frac{1}{a},0\right]$；

(4) 当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$[a-1,-a]$；当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$\varnothing$.

1.2.7. (1) $f[g(x)]=2x+1,x\in\mathbb{R}$；

$g[f(x)]=2x+2,x\in\mathbb{R}$；

(2) $f[g(x)]=\sqrt{x^4+1},x\in\mathbb{R}$；

$g[f(x)]=(x+1)^2,x\in[-1,+\infty)$；

(3) $f[g(x)]=\frac{x-1}{3x-1},x\in\mathbb{R}\backslash\{0,\frac{1}{3}\}$；

$g[f(x)]=-\frac{2}{x},x\in\mathbb{R}\backslash\{-2,0\}$；

(4) $f[g(x)]=|x|,x\in\mathbb{R}$；$g[f(x)]=-|x|,x\in\mathbb{R}$；

(5) $f[g(x)]=\sqrt{1-\sqrt{x-1}},x\in[1,2]$；

$g[f(x)]=\sqrt{\sqrt{1-x}-1},x\in(-\infty,0]$；

(6) $f[g(x)]=1,x\neq0$；$g[f(x)]=1,x\neq0$；

(7) $f[g(x)]=\sqrt[3]{\sqrt[4]{x-1}+1},x\in[1,+\infty)$，

$$g[f(x)]=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x+1}-1},x\in[0,+\infty).$$

1.2.8. (1) $g(x)=\frac{1}{3}(2-x)$; (2) $g(x)=\frac{x-b}{a}$;

(3) $g(x)=x^3+1$.

1.2.9. (1) $y=\log_2\frac{x}{1-x}$;

(2) $y=\frac{1}{2}\lg\frac{x}{x-2}$; (3) $y=\frac{1}{2}(\log_3 x-5)$.

1.2.10. (1) $y=\log_2(x-1)$; (2) $y=4^{x-1}$;

(3) $y=1+\pi-\arcsin x$;

(4) $y=1-\sqrt{x+1}\,(x\geqslant 0)$; (5) $y=1-4\sin x$.

1.2.12. $V=\pi\left[r^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]h,h\in(0,2r)$.

1.2.13. $F=k(2l-x),1.5l\leqslant x\leqslant 2l$.

1.2.14. $V=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2},0<\alpha<2\pi$.

1.2.15. $S=\begin{cases}\frac{h}{a-b}x^2, & 0\leqslant x\leqslant\frac{a-b}{2},\\ h\left(x-\frac{a-b}{4}\right), & \frac{a-b}{2}<x<\frac{a+b}{2},\\ h\left[\frac{a+b}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right], & \frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$

1.2.16. $y=\begin{cases}\frac{h}{c}x, & 0\leqslant x\leqslant c,\\ \frac{h}{c-l}(x-l), & c<x\leqslant l.\end{cases}$

1.2.17. $M=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{3}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 3, & 2<x<3,\\ 4, & x\geqslant 3.\end{cases}$

1.2.18. $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

1.2.19. (1) $F(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<1,\\ \sqrt{-x}, & -1<x<0;\end{cases}$

(2) $F(x)=\sqrt{x-[x]}$.

1.2.20. (1) $F(x)=\begin{cases}e^{x}-1, & x\geqslant 0,\\ 1-e^{-x}, & x<0;\end{cases}$

(2) $F(x)=\begin{cases}e^{x}-1, & x\geqslant 0,\\ e^{-x}-1, & x<0.\end{cases}$

1.2.21. $F(x)=(x-[x])^2$.

1.2.22. $f[g(x)]=\sin(\arcsin x)=x, x\in[-1,1]$,奇函数,非周期函数;$g[f(x)]=\arcsin(\sin x), x\in(-\infty,+\infty)$,奇函数,周期为 2π.

1.2.24. (1) $f[g(x)]=\begin{cases}10x, & x<0,\\ -6x, & x\geqslant 0;\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}10x, & x<0,\\ -3x, & x\geqslant 0;\end{cases}$

(2) $f[g(x)]=\begin{cases}-x\sqrt{-x}, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0;\end{cases}$

$g[f(x)]=f[g(x)]$;

(3) $f[g(x)]=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ 1-x^2, & x>0;\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}1+x, & x\leqslant -1,\\ -(1+x)^2, & -1<x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0;\end{cases}$

(4) $f[g(x)]=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 2, |x|>1;\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}1, |x|=1,\\ 0, |x|\neq 1.\end{cases}$

1.2.26. (1) $T=\dfrac{ab}{(a+b)c}$;

(2) $T=x-\dfrac{1}{x}, x\in\left(1,\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right], T_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

三（第 10 页）

1.3.1. 1,5,37,$\left[\frac{1}{9\varepsilon}+\frac{1}{3}\right]$.

1.3.2. $n>\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{\varepsilon}-6}$.

1.3.4. 提示：令 $a^{\frac{1}{n}}-1=\alpha_n$，利用 $a=(1+\alpha_n)^n>1+n\alpha_n$，$\alpha_n<\frac{a-1}{n}$.

1.3.6. (1)、(2)、(3) 均发散，(4) 收敛.

1.3.7. 提示：对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，又

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}-N_1a}{n}\right.$$
$$\left.+\frac{(x_{N_1+1}-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}\right|\leqslant\frac{M}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $M=|x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}-N_1a|$.

1.3.8. 提示：先证 $|\sqrt[n]{n}-1|<\frac{2}{\sqrt{n}}$.

1.3.9. 提示：对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-a|<\frac{|a|}{4}\varepsilon$，$|x_{n+1}-a|<\frac{|a|}{4}\varepsilon$；$\exists\ N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，有 $|x_n|>\frac{|a|}{2}$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$.

1.3.10. 提示：$|x_{n+1}|\leqslant|x_1|q^n(n=1,2,\cdots)$.

四（第 11 页）

1.4.5. (1) 2；(2) $\frac{1}{4}$；(3) 2；(4) $\frac{1}{4}$；(5) 不存在.

1.4.6. 例如：$f(x)=\operatorname{sgn} x$，$x_0=0$.

五（第 12 页）

1.5.1. （1）无穷大；（2）无穷大；（3）无穷小；

（4）无穷大；（5）无穷小.

1.5.2. （1）$1+\frac{1}{x^3-1}$；（2）$\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2+2}$；（3）$-1+\frac{2}{1+x^2}$.

1.5.6. 提示：对$\forall M>0$，$\exists N_1>0$，使得当$n>N_1$时，有$x_n>3M$，又

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}&=\frac{x_1+\cdots+x_{N_1}}{n}+\frac{x_{N_1+1}+\cdots+x_n}{n}\\&\geqslant\frac{x_{N_1+1}+\cdots+x_n}{n}-\frac{|x_1+\cdots+x_{N_1}|}{n}\\&>\left(1-\frac{N_1}{n}\right)\cdot 3M-\frac{|x_1+\cdots+x_{N_1}|}{n}.\end{aligned}$$

六（第 13 页）

1.6.1. 0.　　1.6.2. ∞.　　1.6.3. $\frac{1}{2}$.

1.6.4. 0.　　1.6.5. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.　　1.6.6. n.

1.6.7. 0.　　1.6.8. ∞.　　1.6.9. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

1.6.10. 0.　　1.6.11. $\frac{2}{3}$.　　1.6.12. 1.

1.6.13. 4.　　1.6.14. $\frac{1}{2}$.　　1.6.15. $\frac{4}{3}$.

1.6.16. $-\frac{1}{2}$.　　1.6.17. 1.　　1.6.18. $\frac{1}{2}$.

1.6.19. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　1.6.20. 1.

1.6.22. $f(-0)=0$，$f(+0)$不存在.

1.6.23. $a=2$，$b=-8$.　　1.6.24. $a=1$，$b=-2$.

1.6.25. $a=1$, $b=0$. 1.6.26. $\frac{1}{1-x}$.

1.6.27. 2.

1.6.29. (1) $3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$; (2) $2\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$; (3) 3.

1.6.30. (1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; (2) $-\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$;

(3) $\frac{3}{2}$.

七(第 16 页)

1.7.1. $\frac{\alpha}{\beta}$. 1.7.2. $\frac{2}{5}$. 1.7.3. $\sqrt{2}$. 1.7.4. 9.

1.7.5. $\frac{2}{3}$. 1.7.6. e. 1.7.7. $\frac{1}{e}$. 1.7.8. e^3.

1.7.9. 0. 1.7.10. 0. 1.7.11. 0. 1.7.12. 0.

1.7.13. $\max\{1,a\}$.

1.7.14. 收敛.提示:$|x_{n+p}-x_n| \leqslant \frac{|q|^{n+1}}{1-|q|}(p=1,2,\cdots)$.

1.7.15. 收敛.提示:$|x_{n+p}-x_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n(p=1,2,\cdots)$.

1.7.16. 1. 1.7.17. $\frac{1}{4\sqrt{2}}$. 1.7.18. $\frac{1}{3}$.

1.7.19. 0. 1.7.20. $\sqrt{3}$. 1.7.21. $\frac{2}{\pi}$.

1.7.22. $2\cos a$. 1.7.23. $\frac{1}{e^2}$.

1.7.24. 当 $\varphi=0$ 时,极限为 1;当 $\varphi\neq 0$ 时,极限为$\frac{\sin\varphi}{\varphi}$.

1.7.25. 当 $\varphi=0$ 时,极限为 1;当 $\varphi\neq 0$ 时,极限为$\frac{\varphi}{\sin\varphi}$.

1.7.26. $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$. 1.7.30. 1.

1.7.31. 提示:先证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$ 存在,再证 $l=0$.

1.7.32. (1) 提示:证明 $x_n\geqslant\sqrt{A}$,$\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant 1$ ($n\geqslant 2$).

(2) $\sqrt{A}$.

1.7.33. 提示：证明数列 $\{y_n\}$ 单调增加，且 $y_n<2$ $(n\in\mathbb{N})$.

1.7.34. 提示：证明数列 $\{x_n\}$ 满足柯西极限存在准则.

1.7.35. 提示：证明 $a\geqslant a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant b_n\geqslant\cdots\geqslant b_1\geqslant b$.

1.7.36. 提示：利用 1.1.28 中的不等式及 1.3.7，1.5.6 中的结论.

八（第 19 页）

1.8.1. 等价.

1.8.2. (1) 同阶，不等价；　　(2) 等价.

1.8.5. $\frac{3}{10}$.

1.8.7. (1) $\alpha=2\frac{1}{3}$；(2) $\alpha=3$；　(3) $\alpha=\frac{n(n+1)}{2}$.

1.8.9. $\frac{1}{6}$.

1.8.10. $\alpha=1996$，$\lambda=\frac{1}{1996}$.

九（第 21 页）

1.9.1. (1) 第一类间断点；　(2) 无穷间断点；

(3) 当 $a=\mathrm{e}$ 时，连续；当 $a\neq\mathrm{e}$ 时，可去间断点；

(4) 连续；　(5) 第二类间断点.

1.9.2. (1) $x=-2$ 为无穷间断点；

(2) $x=0$ 为可去间断点，定义 $f(0)=1$.

$x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为无穷间断点；

(3) $x=0$ 为可去间断点，定义 $f(0)=0$；

(4) $x=1$ 为可去间断点，定义 $f(1)=\frac{2}{3}$；

(5) $x=0$ 为可去间断点，定义 $f(0)=\mathrm{e}$.

1.9.3. $x=0$ 为第一类间断点.

1.9.4. $a=0,b=1$.

1.9.5. $x=1$ 为第一类间断点，$x\neq 1$ 时连续.

1.9.6. (1) $x=\frac{1}{n}(n\in\mathbb{N}_+)$为跳跃间断点，$x=0$ 为无穷间断点；

(2) $x=k\pi(k\in\mathbb{Z})$为跳跃间断点；

(3) $x=0$ 为跳跃间断点，$x=1$ 为无穷间断点，$x=-1$ 为可去间断点.

1.9.7. 不能，因 $f(-0)\neq f(+0)$.

1.9.8. 第一类，否.

1.9.11. 提示：由已知条件推得 $f(x)=f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)(n=1,2,\cdots,x>0)$，并利用连续性.

1.9.12. 提示：令 $x_1=x, x_2=0$ 得 $f(0)=0$. 又 $f(x)-f(x_0)=f(x-x_0)$.

1.9.17. (1) $f(x)=\cot(\pi x)+\cot\frac{\pi}{x}$；

(2) $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q},\\ -1, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q},\\ -x, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

十（第 24 页）

1.10.1. (1) $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty), \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$；

(2) $(-\infty,2), 1$；　　(3) $[4,6], 2$；

(4) $(0,1], \ln\frac{\pi}{6}$.

1.10.2. 3.

1.10.3. 2.

1.10.4. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

1.10.5. (1) $f[g(x)]=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ -x-2, & x>1\end{cases}$ 在 $x\neq 1$ 处连续；

(2) $f[g(x)]=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ x, & x>1\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续；

(3) $f[g(x)]=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续；

(4) $f[g(x)]=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant 1,\\ 3x-1, & x>1\end{cases}$ 在 $x\neq 1$ 处连续；

1.10.6. $a=\frac{1}{\sqrt{2}}, b=-1$.

1.10.7. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant e,\\ \ln x, & x>e\end{cases}$ 在$(0,+\infty)$内连续.

1.10.8. $\frac{1}{e}$.　　1.10.9. $\ln a$.　　1.10.10. e^{β}.

1.10.11. $\alpha-\beta$.　　1.10.13. 125.　　1.10.14. $e^{-\frac{1}{2}}$.

1.10.15. e^{1998}.　　1.10.16. $\sqrt{ab}$.　　1.10.17. e^3.

1.10.18. e.　　1.10.19. 2e.　　1.10.20. $\sqrt[3]{abc}$.

1.10.21. e^{-1}.　　1.10.22. 1.　　1.10.23. $a=\ln 2$.

1.10.25. $\sqrt[3]{4}$. 提示：令 $y_n=\ln x_n$，推出

$$y_{n+2}-y_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2, \text{从而 } y_{n+2}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\ln 2.$$

1.10.26. 提示：由 $f(2x)=f(x)e^x$ 推得

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)e^{x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}, \text{令 } n\to\infty, \text{必要性获证.}$$

十一（第 27 页）

1.11.1. (1) 有上、下界，无最大、最小值；

(2) 有上、下界及最小值，无最大值；

(3) 有上界、最大值，无下界、最小值.

1.11.6. 提示：考虑函数

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b],\\ f(a+0), & x=a.\end{cases}$$

1.11.7. 提示：考虑函数

$$F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a, \\ f(x), & x\in(a,b), \\ f(b-0), & x=b. \end{cases}$$

1.11.8. 提示：令 $f(x)=\frac{5}{x-1}+\frac{7}{x-2}+\frac{16}{x-3}$，利用 $f(1+0)=+\infty$，$f(2-0)=-\infty$，$f(2+0)=+\infty$，$f(3-0)=-\infty$.

1.11.10. 提示：考虑 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，$x\in[0,a]$.

1.11.13. 提示：利用下面的条件：

(1) $a_n>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$f(0)>0$；

(2) $a_n<0$，$f(0)<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$；

(3) $a_n<0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$f(0)<0$.

1.11.14. 提示：记 $\max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=M$，$\min\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=m$. $\frac{t_1f(c)+t_2f(d)}{t_1+t_2}\in[m,M]$.

1.11.15. 提示：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$f(x)=x^3+px+q$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调增加.

1.11.16. 提示：令 $g_n(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$，$x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$. 证明 $g_n(x)$ 在 $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 内至少有一个零点 ξ_0. 若 $\xi_0\neq 0$，即获证；若 $\xi_0=0$，则由 $f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)=f(1)$，以 $\frac{1}{n}$ 代 0，同理可得 $g_n(x)$ 在 $\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$ 上至少有一个零点 ξ，此 $\xi\in(0,1)$.

1.11.17. 提示：先证 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant|x_1-x_0|q^n$ $(n=1,2,\cdots)$. 再利用 1.7.34 的结论证明 x^* 存在. 利用 $x_n=f(x_{n-1})$ 及 $f(x)$ 的连续性，得 $x^*=f(x^*)$.

第　二　章

一（第 29 页）

2.1.1. (1) $2x+3$；　　(2) $3\cos(3x+1)$；

(3) $-2\sin(2x-3)$.

2.1.2. $4\pi\rho\tan^2\dfrac{\theta}{2}$.

2.1.3. $\dfrac{f'(T_0)}{f(T_0)}$.

2.1.4. 不可导.

2.1.6. 不可导.

2.1.7. (1) $f'(x_0)=A$；

(2) 当 $A=0$ 时，$g'(x_0)=0$；当 $A\neq 0$ 时，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导.

2.1.8. $a=1, b=0$.

2.1.9. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

2.1.12. $-\dfrac{99!}{2}\pi$.

2.1.13. $x=0$ 为函数 $\varphi(x)$的可去间断点.

2.1.14. $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2.1.15. $2b\varphi'(a)$.

2.1.19. (1)、(2)、(3)、(4) 均不等价，(5) 等价.

二（第 32 页）

2.2.1. (1) $\dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$；　　(2) $-\dfrac{4}{9}x^{-\frac{13}{9}}$；

(3) $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}$；　　(4) $\dfrac{2mx+n}{p+q}$；

(5) $1.6x^{0.6}-1.6x^{-1.4}+4.2x^{-2.4}$;

(6) $\frac{1}{a+b}\left(2ax+b-\frac{c}{x^2}\right)$.

2.2.2. 16, $\frac{1}{a^3}(15a^5-a^3+2)$.

2.2.3. $(x-c)(x-d)(2x-a-b)$
$+(x-a)(x-b)(2x-c-d)$.

2.2.4. $\sin\varphi+\varphi\cos\varphi-\frac{\varphi\sin\varphi+\cos\varphi}{\varphi^2}$.

2.2.5. $-\frac{8\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}+2}{6\sqrt[6]{x}(x-2\sqrt[3]{x})^2}$.

2.2.6. $(a\cos x+\cos a)(a\cos x+x\sin a)$
$+(a\sin x+x\cos a)(\sin a-a\sin x)$.

2.2.7. $\frac{\cos t(1+t\sin\sqrt{\pi})-\sin t\cdot\sin\sqrt{\pi}}{(1+t\sin\sqrt{\pi})^2}$

2.2.8. $\frac{1-x\ln 4}{4^x}$.

2.2.9. $\frac{\cos x}{1+\tan x}-\frac{\tan x\cdot\sec x}{(1+\tan x)^2}$.

2.2.10. $\frac{a^x[(\sin x\cdot\ln a+\cos x)(1+x)-\sin x]}{(1+x)^2}$.

2.2.11. $\sec x(1+x\tan x)-\frac{x-2}{x^3}e^x$.

2.2.12. $\cot x-x\csc^2 x-\cot x\cdot\csc x$.

2.2.13. $(\ln 2,3)$.

2.2.14. $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$.

2.2.15. 切线方程:$x+2y-3=0$;
法线方程:$2x-y-1=0$.

2.2.16. $3x+y+2=0$.

2.2.17. $a=-2,b=4$.

2.2.18. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right),(-1,1)$.

2.2.19. $3\frac{3}{4}$.

2.2.20. (1) $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

(2)

$$\frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2n^2+2n-1)x^{n+2}-n^2x^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

2.2.21. $4x+y+4=0$.

2.2.22. $y=\frac{a+b}{2}x-\left(\frac{a-b}{4}\right)^2$.

2.2.23. (1) $\left(\frac{2k}{n},\frac{4k^2}{n^2}\right)$;

(2) $\frac{1}{6}$.

三（第34页）

2.3.1. $\frac{2-2\ln x}{(x-\ln x)^2}$.　　2.3.2. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x-1$.

2.3.3. $\frac{(1+x^2)\arctan x+2x-4x^2\arctan x}{2\sqrt{x}(1+x^2)^2}$.

2.3.4. $\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\ln 2}+1-\log_2 x-\ln x\right)$.

2.3.5. $\frac{x^4(7x^6-40)}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}$.　　2.3.6. $\frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

2.3.7. $\arcsin\sqrt{1-4x}-\sqrt{\frac{4x}{1-4x}}$.

2.3.8. $\frac{x\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

2.3.9. $2^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\cdot\ln 2$.

2.3.10. $\frac{\cot\frac{1}{x}}{2x^2\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}$.

2.3.11. $-\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{4x^2}(1+\sqrt[3]{2x})^2}$.

2.3.12. $-\frac{2}{3}x(1+x^2)^{-\frac{4}{3}}$.

2.3.13. $-\frac{1}{2}\frac{\tan x}{\sqrt{\ln\cos x(1-\ln\cos x)}}$.

2.3.14. $\frac{1}{x(1-x)\ln 5}$

2.3.15. $\frac{1-x^2}{2x^2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\csc\sqrt{x+\frac{1}{x}}\cdot\cot\sqrt{x+\frac{1}{x}}$.

2.3.16. $\frac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

2.3.17. $\frac{2-3x^2}{2\sqrt{x^3-2x}(1-2x+x^3)}$.

2.3.18. $\frac{2x^2+6x-1}{3(x+2)(x^2+1)\ln 10}$.

2.3.19. a^2.

2.3.20. (e,e), $x+2y-3e=0$.

2.3.21. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

2.3.22. $e^{f(x)}[e^x f'(e^x)+f(e^x)f'(x)]$.

2.3.23. $a^{\varphi(x)\psi(x)}\ln a[\varphi'(x)\psi(x)+\varphi(x)\psi'(x)]$.

2.3.24. $\frac{g'(x)}{g(x)\ln f(x)}-\frac{f'(x)\ln g(x)}{f(x)\ln^2 f(x)}$.

2.3.25. $\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$.

2.3.26. 0.

2.3.27. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g[f(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -2x, & x>0.\end{cases}$

2.3.28. 0.

2.3.29. $\dfrac{1}{(1+nx^2)^{3/2}}$.

2.3.30. $x+y=0, x+25y=0$.

2.3.31. $a=e^{\frac{1}{e}}$；(e,e).

2.3.32. $\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$；$-f'(\sin^2 x)+f'(\cos^2 x)$；$2\cos x[f'(\cos^2 x)-f'(\sin^2 x)]$.

2.3.33. (1) 仅 $f(x), f[g(x)]$在 $x=0$ 处可导；

(2) 仅 $f(x)$在 $x=0$ 处可导；

(3) 仅 $g(x), f[g(x)]$在 $x=0$ 处可导；

(4) 仅 $g(x)$在 $x=0$ 处可导；

(5) 仅 $f[g(x)]$在 $x=0$ 处可导；

(6) $f(x), g(x), f[g(x)]$在 $x=0$ 处均不可导.

四（第 37 页）

2.4.1. $\sec^2(2x)+4x\tan(2x)\sec^2(2x)+\dfrac{1}{x^2}\sec^2\dfrac{1}{x}$.

2.4.2. $e^{-x}\arccos\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{2}{|x|\sqrt{x^2-1}}-\arccos\dfrac{1}{x}\right]$.

2.4.3. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$.

2.4.4. $-4\cot(2x)\csc^2(2x)$.

2.4.5. $\dfrac{-1}{(x^2+2x+2)\arctan\dfrac{1}{1+x}}$.

2.4.6. $\dfrac{-\sin\dfrac{\arcsin x}{2}}{2\sqrt{1-x^2}}$.

2.4.7. $\dfrac{6}{x\ln x\cdot\ln(\ln^3 x)}$.

2.4.8. $\dfrac{\sin\dfrac{2(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

2.4.9. $\csc^3 x$.

2.4.10. $\dfrac{(1+\sin x)\sin(x-\cos x)}{\cos^2(x-\cos x)}$.

2.4.11. $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$.

2.4.12. $e^x(\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x)$.

2.4.13. $e^{x+2}(\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x)+\operatorname{sh} x$.

2.4.14. $\dfrac{2}{(\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)^2}$.

2.4.15. $\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$.

2.4.16. $\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$.

2.4.17. $\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)$.

2.4.18. $\dfrac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$.

2.4.19. $\dfrac{1}{1+2\operatorname{sh}^2 x}$.

2.4.20. $\dfrac{-2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$.

2.4.21. $-\operatorname{th} x$.

2.4.22. $\operatorname{th}^3 x$.

2.4.23. (1) $\dfrac{r\omega\cos\omega t}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}}$;

(2) $-\left(r\omega\sin\omega t+\dfrac{r^2\omega\sin 2\omega t}{2\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}}\right)$.

2.4.24. $$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi}, & x<-\pi/2,\\ -\sin x, & -\pi/2<x<0,\\ \dfrac{2}{\pi}, & x>0.\end{cases}$$

2.4.25. $\dfrac{x}{|x|}e^{|x|}\operatorname{sh} e^{|x|}$.

2.4.26. x^2-1 $(|x|<1)$.

2.4.27. (1) $0<\alpha\leqslant 1$;　　(2) $1<\alpha\leqslant 2$;

(3) $\alpha>2$.

2.4.28. 在 $x\neq 0$ 处，$f(x)$连续、可导，且 $f'(x)$也连续；

在 $x=0$ 处，$f(x)$连续、可导，但 $f'(x)$不连续.

2.4.29. $a=2, b=1, f'(x)=\begin{cases} 2e^{2x}, & x\leqslant 0, \\ 2\cos 2x, & x>0. \end{cases}$

2.4.30. $g'(x_0)=[\operatorname{sgn} f(x_0)]\cdot f'(x_0)$.

五（第 39 页）

2.5.1. $2\varphi(a)$.

2.5.2. (1) $2e^{x^2}(3x+2x^3)$;　　(2) $\dfrac{a+3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}(a+\sqrt{x})^3}$;

(3) $-4\cos 4x$;

(4) $9\sin 6x-4\sin 4x-\sin 2x$;

(5) $(b+1)b^{b-1}x^{-b-2}+\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\ln\dfrac{a}{b}\right)^2$.

2.5.3. $4e^{-1}$.

2.5.4. $\dfrac{6}{x}$.

2.5.5. $16a\sin 2\varphi$.

2.5.6. $a=-\dfrac{1}{2}, b=1, c=0$.

2.5.7. (1) $f''(e^x)\cdot e^{2x}+f'(x)e^x$;

(2) $\dfrac{2f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{4[f(x)]^{3/2}}$;

(3) $e^{f(x)}\{f''(x)+2[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$

$+f(x)[f'(x)]^2\}$;

(4) $-\dfrac{1}{x^2}f(x^2)+4f'(x^2)+2(\ln x)f'(x^2)$

$+4x^2(\ln x)f''(x^2)$;

(5) $2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)+\dfrac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$;

(6) $2e^{x^2}f(x)+4x^2e^{x^2}f(x)+2x^{e^2}e^{x^2}f(x^{e^2})+2xe^{x^2}$.

2.5.8. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=f''[\varphi(x)]\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)^2+f'[\varphi(x)]\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}$.

2.5.12. $\dfrac{(-1)^{n-1}2(n-3)!}{x^{n-2}}$ $(n\geqslant 3)$.

2.5.13. $(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

2.5.14. $(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 4\cdots(3n-5)}{3^n}(1+x)^{-\frac{1}{3}-n}(3n+2x)$

$(n\geqslant 2)$.

2.5.15. $\dfrac{3}{4}\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-\dfrac{3^n}{4}\sin\left(3x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

2.5.16. $e^x(x^2+12x+29)$.

2.5.17. $e^x\sum\limits_{n=0}^{10}(-1)^n C_n^{10}\dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

2.5.18. $\pi[f'(x)+xf''(x)]$.

2.5.19. $\varphi'(a)=1$, $\varphi''(a)=2$.

2.5.20. $\dfrac{100!}{3}\left[\dfrac{1}{(x-1)^{101}}-\dfrac{1}{(x+2)^{101}}\right]$.

2.5.22. $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ [(n-2)!!]^2, & n=2k-1\ (k=1,2,\cdots).\end{cases}$

2.5.23. $n!\ \varphi(a)$.

2.5.26. $\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}-6y=e^{3t}$.

2.5.27. $\dfrac{d^2y}{dt^2}+a^2y=0$.

2.5.28. $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+2y=0$.

2.5.29. $y'(0)=A$, $y^{(2k)}(0)=0$ $(k=1,2,\cdots)$,

$y^{(2k+1)}(0)=(-1)^kA(A^2-1^2)(A^2-3^2)\cdots[A^2-(2k-1)^2]$ $(k=1,2,\cdots)$.

提示：令 $Q(x)=A\arcsin x$.

2.5.30. 提示：利用莱布尼茨(Leibniz)公式.

六（第 42 页）

2.6.1. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1-x-x^2}{(1-x)(1+x)}$.

2.6.2. $\frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

2.6.3. $\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x}\sin x}\left(\frac{1}{4x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4}\cot x\right)$.

2.6.4. $\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(\ln\frac{a}{b}+\frac{b-a}{x}\right)$.

2.6.5. $\frac{1}{2}\sqrt{(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdot\cdots\cdot(x-c_n)k_n}\cdot$

$$\left(\frac{k_1}{x-c_1}+\frac{k_2}{x-c_2}+\cdots+\frac{k_n}{x-c_n}\right).$$

2.6.6. $\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$.

2.6.7. $-\frac{ye^{xy}+2xy\cos(x^2y)}{xe^{xy}+x^2\cos(x^2y)-2y}$.

2.6.8. $\frac{y}{x}$.

2.6.9. $\frac{y\sin(xy)+\cot y}{x\csc^2y-x\sin(xy)}$.

2.6.10. $\frac{xy-y^2}{x^2}$.

2.6.11. $\frac{\ln\sin y+y\tan x}{\ln\cos x-x\cot y}$.

2.6.13. 当 $t\neq0$ 时，$\frac{dy}{dx}=\frac{t}{|t|}$.

2.6.15. 切线方程：$x+2y-3=0$，法线方程：$2x-y-6=0$.

2.6.16. 切线方程：$x+2y-4=0$，法线方程：$4x-2y-1=0$.

2.6.17. 切线方程：$x+y-3a=0$，法线方程：$x-y=0$.

2.6.18. $\frac{(2y-y^2)(e-xy+x)+xy^2}{(e-xy+x)^3}$.

2.6.19. $-\frac{R^2}{y^3}$.

2.6.20. $\dfrac{2x^2y}{(1+y^2)^3}[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)]$.

2.6.21. $-\dfrac{2(y^2+1)}{y^5}$.

2.6.22. $\dfrac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$.

2.6.23. $\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

2.6.24. $\dfrac{y^2f''(xy)+2yf'^2(xy)-2xyf'^3(xy)}{[1-xf'(xy)]^3}$.

2.6.25. 当 $x-2y\neq 0$ 时，

$$y'=\frac{2x-y}{x-2y}, y''=\frac{6}{(x-2y)^3}, y'''=\frac{54x}{(x-2y)^5}.$$

2.6.26. $-\tan t, \dfrac{1}{3a}\csc t\cdot\sec^4 t, \dfrac{1}{9a^2}\sec^5 t\cdot\csc^3 t(1-4\tan^2 t)$.

2.6.27. $2e^{-3a\varphi}(1-3e^{-a\varphi})$.

2.6.28. $\dfrac{(1+t^2)(t^2+3)}{t^5}$.

2.6.29. $64t^4$.

2.6.30. (1) $v_0\cos\alpha$, $v_0\sin\alpha-gt$;

(2) $v=\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\alpha+g^2t^2}$,

$\theta=\arctan\left(\tan\alpha-\dfrac{gt}{v_0\cos\alpha}\right)$;

(3) 0, $-g$.

2.6.31. $\sqrt{5}$(m/s).

2.6.32. (1) 0.875 m/s; (2) 下端离墙$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ m 时；

(3) 下端离墙 4 m 时.

2.6.33. $\dfrac{3\sqrt{3}}{160}$(m/s).

2.6.34. $v\left(1-\cos\dfrac{x}{R}\right), v\sin\dfrac{x}{R}; v\sqrt{2\left(1-\cos\dfrac{x}{R}\right)}$;

$$\arctan\frac{\sin\frac{x}{R}}{1-\cos\frac{x}{R}}.$$

2.6.36. $-\frac{1}{7}$.

2.6.37. $x-ey-e=0$.

2.6.38. $\left(\ln 2,\frac{\pi}{4}\right)$.

2.6.41. 两曲线在交点($\sqrt{2}$,$\sqrt{2}$)和($-\sqrt{2}$,$-\sqrt{2}$)处的交角均为$\frac{\pi}{2}$.

2.6.42. $x+y-2=0$.

2.6.45. 140(m/min),56(m/min).

2.6.46. $40\sqrt{3}$(m).

七(第46页)

2.7.1. 0.008.

2.7.2. 0.1.

2.7.3. 4.

2.7.4. $x=-2$.

2.7.5. (1) $\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx$;

(2) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$;

(3) $\left[\arctan\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}\right]dx$;

(4) $2\ln 5\cdot\csc 2x\cdot 5^{\ln\tan x}dx$;

(5) $\frac{2x\cos x-(1-x^2)\sin x}{(1-x^2)^2}dx$;

(6) $-\ln 2\cdot\tan x\cdot\sec x\cdot 2^{-\sec x}dx$;

(7) $5x^{5x}(\ln x+1)dx$;

(8) $\frac{1}{(1-x)^2}\sin\frac{2}{1-x}dx$.

2.7.6. (1) $-\frac{\sqrt{3}\pi}{45(1+\sqrt{3})^3}$;

(2) $-\frac{\sqrt{3}\pi}{720}$;

(3) -0.002;　　(4) $\frac{e^3}{600}$.

2.7.7. $\frac{(2t^3+4t+7)(3t^2+2)}{3\sqrt[3]{(t^3+2t+1)^2(t^3+2t+6)^2}}dt$.

2.7.8. $\frac{3}{3t+1}\sin[2\ln(3t+1)]dt$.

2.7.9. $\frac{-1}{2(1+t)\sqrt{t}(\arctan\sqrt{t})^2}e^{\frac{1}{\arctan\sqrt{t}}}dt$.

2.7.10. $\frac{1}{2(t+1)\ln a}dt$.

2.7.11. $\frac{4u-3}{2\sqrt{2u^2-3u+1}}du$.

2.7.12. $-2\sec(2s)ds$.

2.7.13. 0.00582.

2.7.14. (1) 0.7950;　(2) 0.4889;

(3) 2.7455;　(4) 1.0067;

(5) 1.0434;　(6) 0.8704;

(7) 3.0272.

2.7.15. 0.995.

2.7.16. $4.5\pi(cm^2)$.

2.7.17. 125.82(g).

2.7.18. $56.478(m^2)$, $\delta_A=0.033(m^2)$.

2.7.19. 0.51%.

2.7.20. 0.25%, 0.5%.

2.7.22. $\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4-1}}dx$, $\frac{\sqrt{6}}{450}$.

2.7.25. (1) 1.9953;　(2) 1.0025;

(3) 10.9545.

2.7.27. $\frac{1}{300}$.

八（第 49 页）

2.8.1. $f'_+(1)=1$，$f'_-(1)=-1$，$f'_+(-1)=1$，$f'_-(-1)=-1$.

2.8.3. $\frac{1}{2}\cdot F'(0)$.

2.8.7. $\frac{1}{e}$.

2.8.9. 均不能断定.

2.8.10. (1)正确；　　(2) 错误.

2.8.11. 当 $f(x_0)\neq g(x_0)$时，不能断定；当 $f(x_0)=g(x_0)$时能断定。

2.8.12. (1) 不对；　　(2) 不对.

2.8.13. 当 $0< a\leqslant 1$ 时，不能断定 $f'(a)$存在.

2.8.14. $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

2.8.15. $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}(n\geqslant 3)$.

2.8.16. $3^{48}[(2450-9x^2)\sin 3x-300x\cos 3x]$.

2.8.17. $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^k(2k)!, & n=2k+1\end{cases}\quad (k=0,1,\cdots)$.

2.8.18. $a=\frac{1}{2}f''(x_0), b=f'(x_0), c=f(x_0)$.

2.8.20. 0.

2.8.21. $4(m^2/\min)$.

2.8.24. 不能断定.

2.8.25. $f'(x_0)$.

第　三　章

一（第 53 页）

3.1.12. $f(x)=kx$. 提示：先求得 $f'(x)=f'(0)$.

3.1.16. 提示：利用拉格朗日中值定理及罗尔定理.

3.1.17. 提示:作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)e^{g(x)}$.

3.1.20. 提示:用反证法.

3.1.23. 提示:令 $F(x)=f(x)-cx, x\in[a,b]$.

*3.1.24. 提示:利用柯西审敛原理.

*3.1.25. (1)、(2)、(3)均成立.

二(第56页)

3.2.1. -2.

3.2.2. -2.

3.2.3. $-\frac{1}{2}$.

3.2.4. $-\frac{1}{6}$.

3.2.5. 1.

3.2.6. $\frac{3}{5}$.

3.2.7. $-\infty$.

3.2.8. $\cos a$.

3.2.9. $\frac{1}{2}$.

3.2.10. 0.

3.2.11. 1.

3.2.12. $e^{3/2}$.

3.2.13. $e^{2/\pi}$.

3.2.14. 1.

3.2.15. $\frac{1}{e}$.

3.2.16. $e^{-\frac{1}{3}}$.

3.2.17. 1.

3.2.18. 1.

3.2.19. 1.

3.2.22. $f'(0)=-\frac{1}{12}$.

3.2.23. $\frac{2}{3}$.

3.2.24. $\frac{1}{6}$.

3.2.25. -2.

3.2.26. $\frac{1}{6}\ln a$.

3.2.27. $\frac{4}{\pi}$.

3.2.28. 1.

3.2.29. 0.

3.2.30. $\frac{1}{2}$.

3.2.31. $e^{-\frac{1}{6}}$.

3.2.32. $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

3.2.33. $P(x)=\frac{1}{2}(\ln 2)^2x^2+(\ln 2)x+1$.

三（第 58 页）

3.3.1. $\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}-\frac{1}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$
$(0<\theta<1)$.

3.3.2. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\frac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{2(2n+1)!}x^{2n+1}$
$(0<\theta<1)$.

3.3.3. $$\sin^2 x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}$$
$$+(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\sin(2\theta x)\cdot x^{2n+1}\quad(0<\theta<1).$$

3.3.4. $\frac{x}{x-1}=2-\sum_{k=1}^{3}(x-2)^k+\frac{(x-2)^4}{[1+\theta(x-2)]^5}$
$(0<\theta<1)$.

3.3.5. $$x^2\ln x=(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2$$
$$+\sum_{k=3}^{n}(-1)^{k-1}\frac{2(x-1)^k}{k(k-1)(k-2)}$$
$$+\frac{(-1)^n 2(x-1)^{n+1}}{n(n-1)(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n-1}}\quad(0<\theta<1).$$

3.3.7. 0.8209.

3.3.8. 1.3643.

3.3.9. 3.018348, $|R_2|<0.000001$.

3.3.12. $-\frac{1}{12}$.

3.3.13. $\frac{1}{2}$.

3.3.14. $\frac{1}{3}$.

3.3.15. $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

3.3.16. $\frac{1}{3}$.

3.3.17. $\frac{11}{12}$.

3.3.18. $-\frac{1}{4}$.

3.3.19. $-\frac{1}{60}$.

3.3.20. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right),(x\to\infty)$.

3.3.22. 提示：利用题 3.3.1 的结论．

3.3.23. $\frac{1}{n+1}$.

3.3.24. 提示：考虑 $s\left(\frac{T}{2}\right)\geqslant\frac{s}{2}$ 及 $s\left(\frac{T}{2}\right)<\frac{s}{2}$ 两种情形．

四（第 61 页）

3.4.1. $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$ 为单调减少区间，

$[-1, 0]$, $[1, +\infty)$ 为单调增加区间．

3.4.2. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{11}{18}, +\infty\right)$ 为单调增加区间，

$\left[-\frac{1}{2}, \frac{11}{18}\right]$ 为单调减少区间．

3.4.9. 不正确，例如：$f(x)=x, g(x)=2x-3, x\in(0,1)$.

3.4.11. $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ 为单调增加区间，

$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$，为单调减少区间．

3.4.13. 一个．

3.4.14. 二个，分别在 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内．

3.4.15. 三个，分别在 $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 内．

3.4.19. 不一定．

五（第 63 页）

3.5.1. 极大值：$y(1)=0$，　极小值：$y\left(\frac{7}{5}\right)=-\frac{108}{3125}$.

3.5.2. 极大值：$y(0)=0$，　极小值：$y(-1)=-\frac{5}{12}$, $y(2)=-\frac{8}{3}$.

3.5.3. 极大值：$y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$，　极小值：$y(-1)=0$，

$y(5)=0$.

3.5.4. 极大值：$y(-\sqrt{2})=-(17+12\sqrt{2})$，极小值：$y(\sqrt{2})=-(17-12\sqrt{2})$.

3.5.5. 极大值：$y(-1)=1$，　极小值：$y(0)=0$.

3.5.6. 极大值：$y(\pm\sqrt{2})=4e^{-2}$，　极小值：$y(0)=0$.

3.5.7. 极大值：$y\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}$，

极小值：$y\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}(k=0,\pm1,\cdots)$.

3.5.8. $a=\frac{1}{4}$，$b=-\frac{3}{4}$，$c=0$，$d=1$.

3.5.11. 当 n 为偶数且 $\varphi(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$为极小值，
当 n 为偶数且 $\varphi(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$为极大值.

3.5.12. 当 $a>0$ 时，有极大值 $y(-\sqrt{a})=2+2a^{\frac{3}{2}}$，极小值 $y(\sqrt{a})=2-2a^{\frac{3}{2}}$；当 $a>1$ 时，有三个不同实根；当 $a<1$ 时，有唯一实根.

3.5.14. $P(x)=x^3-6x^2+9x+2$.

3.5.15. 均不能断定.

3.5.19. 当 $a<-\frac{1}{e}$时，无实根；当 $a=-\frac{1}{e}$时，仅有一个实根 $x=\frac{1}{e}$；当$-\frac{1}{e}<a<0$ 时，有两个实根；当 $a\geqslant0$ 时，有一个实根.

3.5.20. 提示：令 $f(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

3.5.21. 提示：利用泰勒公式.

3.5.22. 否.

六（第 65 页）

3.6.1. 最大值 35，最小值-46.

3.6.2. 无最大值，最小值$(a+b)^2$.

3.6.3. 最大值 1，无最小值.

3.6.4. 无最大值,最小值 $e^{-\frac{1}{e}}$.

3.6.5. 1 cm.

3.6.6. $\frac{70}{43}$小时.

3.6.7. r.

3.6.8. $(x_0^{2/3}+y_0^{2/3})^{3/2}$.

3.6.9. $\sqrt{2}a$，$\sqrt{2}b$.

3.6.10. $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $H=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

3.6.11. 长 $2a+\sqrt{\frac{aS}{b}}$,宽 $2b+\sqrt{\frac{bS}{a}}$.

3.6.12. $h=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$, $b=\frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}}$.

3.6.13. 5 小时.

3.6.14. $x=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

3.6.15. $\frac{\sqrt{(av_2^2-bv_1v_2)^2+(bv_1^2-av_1v_2)^2}}{v_1^2+v_2^2}$.

3.6.16. $h:r=3:2$.

3.6.17. $x=2$(cm)，$y=\sqrt{5}+1$(cm).

3.6.18. 最大值 1，最小值 0.

3.6.19. 最大值 132，最小值 0.

3.6.20. $\sqrt[3]{3}$.

3.6.21. $\frac{4}{3}R$.

3.6.22. $a=\frac{16-2\sqrt{3}}{3}$ m，$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ m.

3.6.23. $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

3.6.24. $3\sqrt{3}a$.

3.6.25. 距渔站 3 km 处.

3.6.26. (1) $m=1$; (2) $m=\frac{4}{3}$.

3.6.27. $r=\frac{1}{2}$, $h=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

3.6.28. $\frac{4l}{4+\pi}$, $\frac{\pi l}{4+\pi}$.

3.6.29. $d_{\min}=\frac{1}{2}l$, $d_{\max}=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}l$.

3.6.31. 两次用水量相等.

3.6.32. 长为$\frac{1}{12}(H+W)$、宽为$\frac{1}{12}(H+W)$、高为$\frac{1}{12}(H-2W)$时,容积最小;

长为$\frac{1}{12}(H-W)$、宽为$\frac{1}{12}(H-W)$、高为$\frac{1}{12}(H+2W)$时,容积最大(其中$W=\sqrt{H^2-24A}$).

七(第 69 页)

3.7.1. (1) 点(1,1)邻近是凸的,点(3,3)邻近是凹的.

(2) 点(1,0)邻近是凹的,点$(e^{-2}, -2e^{-4})$邻近是凸的.

(3) 点$\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$邻近是凸的,点$\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$邻近是凹的.

3.7.2. $y-3=21(x-1)$.

3.7.3. 拐点:$(-3, 294)$,$(2,114)$;在$(-\infty, -3]$,$[2,+\infty)$上是凸的,在$[-3,2]$上是凹的.

3.7.4. 拐点:$\left(-3a, -\frac{9a}{4}\right)$,$(0,0)$,$\left(3a, \frac{9a}{4}\right)$;在$[-3a, 0]$,$[3a, +\infty)$上是凸的,在$(-\infty, -3a]$,$[0, 3a]$上是凹的.

3.7.5. 拐点：$\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{3}{4}a\right)$，$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{3}{4}a\right)$；在$\left(-\infty,\ -\frac{a}{\sqrt{3}}\right]$，$\left[\frac{a}{\sqrt{3}},\ +\infty\right)$上是凹的，在$\left[-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}}\right]$上是凸的．

3.7.6. 拐点：(b,a)；在$(-\infty,b]$上是凸的，在$[b,\ +\infty)$上是凹的．

3.7.7. 拐点：$\left(ae^{3/2},\ \frac{3}{2}e^{-3/2}\right)$；在$(0,\ ae^{3/2}]$上是凸的，在$[ae^{3/2},\ +\infty)$上是凹的．

3.7.8. 无拐点：在$(-\infty,\ +\infty)$内是凹的．

3.7.9. 无拐点：在$(-\infty,\ +\infty)$内是凸的．

3.7.10. 拐点：$(b,0)$；在$(-\infty,\ b]$上是凸的，在$[b,\ +\infty)$上是凹的．

3.7.11. 拐点：$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$；在$\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$，$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$上是凹的，在$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$上是凸的．

3.7.12. 拐点：$(k\pi,\ 0)$；在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right]$上是凸的，在$\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k=0,\pm1,\cdots)$上是凹的．

3.7.13. 拐点：$(2-\sqrt{2},\ (2-\sqrt{2})^2e^{-(2-\sqrt{2})})$，$(2+\sqrt{2},\ (2+\sqrt{2})^2e^{-(2-\sqrt{2})})$；在$(-\infty,\ 2-\sqrt{2}]$，$[2+\sqrt{2},\ +\infty)$上是凹的，在$[2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}]$上是凸的．

3.7.14. 拐点：$(0,1)$，$(1,2)$；在$(-\infty,0]$，$[1,+\infty)$上是凸的，在$[0,1]$上是凹的．

3.7.16. $y=-\frac{3}{2}x^2$.

八（第 70 页）

3.8.1. $x=b$，$y=c$.

3.8.2. $x=0$, $y=0$.

3.8.3. $x=-1$, $y=\frac{1}{2}x-1$.

3.8.4. $y=x+2$.

3.8.5. $x=-\frac{1}{e}$, $y=x+\frac{1}{e}$.

3.8.6. $x=0$, $y=x+3$.

3.8.7. $y=2x+\frac{\pi}{2}$, $y=2x-\frac{\pi}{2}$.

3.8.8. 对称于 y 轴；极大值：$y(0)=8a$；拐点：$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, 6a\right)$；渐近线：$y=0$.

3.8.9. 对称于原点；定义域：$(-\infty, -\sqrt{3})$，$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$，$(\sqrt{3}, +\infty)$；拐点：$(0,0)$；渐近线：$y=0$，$x=\sqrt{3}$，$x=-\sqrt{3}$.

3.8.10. 对称于原点；极大值：$y(-1)=2$；极小值：$y(1)=-2$；拐点：$(0,0)$，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{8}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{8}\right)$.

3.8.11. 对称于原点；极大值：$y(2)=\frac{1}{e}\sqrt{2e}$；极小值：$y(-\sqrt{2})=-\frac{1}{e}\sqrt{2e}$；拐点：$(0,0)$，$(\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{6}e^{-\frac{3}{2}})$；渐近线：$y=0$.

3.8.12. 定义域：$x\neq 0$；极小值：$y(1)=e$；渐近线：$x=0$，$y=0$.

3.8.13. $y=-x-a$.

3.8.14. 定义域：$(2k\pi, (2k+1)\pi)$；曲线位于 x 轴下方；极大值：$y\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$；渐近线：$x=k\pi(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

3.8.15. 对称于原点；极大值：$y(-1)=\frac{\pi}{2}-1$；极小值：$y(1)=1-\frac{\pi}{2}$；拐点：$(0,0)$；渐近线：$y=x+\pi$，$y=x-\pi$.

3.8.16. 定义域：$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$；极大值：$y(2k\pi)=1$；极小值：$y((2k+1)\pi)=-1$；渐近线：$x=\frac{2k+1}{2}\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

3.8.17. 定义域：$(-\infty,0]$，$(1,+\infty)$，极小值：$y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$；渐近线：$x=1$，$y=-x-\frac{1}{2}$，$y=x+\frac{1}{2}$.

九（第71页）

3.9.1. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.　　3.9.2. 0.

3.9.3. $\frac{a}{y_0^2}$.　　3.9.4. $\frac{1}{a}$.

3.9.5. $\frac{2+\theta^2}{a(1+\theta^2)^{3/2}}$.　　3.9.6. 6.

3.9.7. $(0,0)$.

3.9.8. $k(0)=0$；$\left(\frac{1}{(45p^2)^{1/4}},\ \frac{p}{(45p^2)^{3/4}}\right)$.

3.9.12. $\frac{4}{3}a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$或$\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$.

3.9.13. $(x+2)^2+(y-3)^2=8$.

3.9.14. $\frac{1}{at}$，$(a\cos t,\ a\sin t)$.

十（第72页）

3.10.1. $-0.64<x_1<-0.63$，$0.87<x_2<0.88$.

3.10.2. $0.38<x_1<0.39$，$1.24<x_2<1.25$.

3.10.3. $1.675<x_1<1.676$，$0.539<x_2<0.540$，$-2.215<x_3<-2.214$.

3.10.4. $1.0447<x<1.0448$.

3.10.5. $x\approx4.4934$.

3.10.6. $x\approx0.5110$.

3.10.7. $x_1 \approx 0.1118, x_2 \approx 3.577$.

十一（第 73 页）

3.11.1. (1) 否；(2) 否；(3) 否.

3.11.8. 1.

3.11.9. $-\frac{e}{2}$.

3.11.10. $-\frac{1}{4}$.

3.11.11. $\frac{1}{6}$.

3.11.13. n 为奇数时，极大值：$f(0)=1$；

n 为偶数时，无极值.

3.11.14. 当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，有两个实根；

当 $a=\frac{1}{e}$ 时，只有一个实根；

当 $a>\frac{1}{e}$ 时，无实根.

3.11.15. $\sqrt[3]{4V}$.

3.11.16. $\frac{2}{3}\sqrt{6pa}$ 及 $\frac{2}{3}a$.

3.11.17. $M\left(\sqrt{\frac{1}{12}}, \frac{1}{3}\right)$ 或 $M\left(-\sqrt{\frac{1}{12}}, \frac{1}{3}\right)$.

3.11.18. $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

3.11.19. 最大值：$\frac{32}{27}$，最小值：$\frac{3}{8}$.

3.11.20. $\frac{4}{3}$ m.

3.11.21. $\frac{b^2}{a}$, $\left(\frac{a^2-b^2}{a}, 0\right)$.

*3.11.22. $a=e$.

3.11.25. $\frac{1}{2}$.

第 四 章

一（第 77 页）

4.1.1. $y=\frac{5}{3}x^3$.

4.1.3. $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2+s_0$，$s\left(-\frac{v_0}{a}\right)=-\frac{v_0^2}{2a}+s_0$.

4.1.4. $y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$.

4.1.5. $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{5}x^{5/2}+x+C$.

4.1.6. $\frac{4}{5}x^{5/4}-\frac{24}{17}x^{17/12}+\frac{4}{3}x^{3/4}+C$.

4.1.7. $3x-3\arctan x+C$.

4.1.8. $-\frac{1}{x}+\arctan x+C$.

4.1.9. $\arctan x+x-\frac{1}{3}x^3+C$.

4.1.10. $\frac{1}{2}\tan x+\frac{1}{2}x+C$.　　4.1.11. $\tan x-\cot x+C$.

4.1.12. $4\tan x-9\cot x-x+C$.　4.1.13. $\frac{1}{b+\ln b}b^x e^{bx}+C$.

4.1.14. $\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+C$.

二（第 78 页）

4.2.1. $k\neq-1$ 时，$\frac{1}{b(k+1)}(a+bx)^{k+1}+C$；

$k=-1$ 时，$\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$.

4.2.2. $\frac{1}{m\ln a}a^{mx+n}+C$.　　4.2.3. $\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\sqrt{\frac{3}{2}}x+C$.

4.2.4. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}\right|+C.$

4.2.5. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x+C.$

4.2.6. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|+C.$

4.2.7. $\frac{1}{11}(x^2-3x+1)^{11}+C.$

4.2.8. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C.$ 4.2.9. $\frac{1}{8}\cos^8 x-\frac{1}{6}\cos^6 x+C.$

4.2.10. $\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{1}{7}\tan^7 x+C.$

4.2.11. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)+C.$

4.2.12. $-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos^2 x\right)+C.$

4.2.13. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan x\right)+C.$

4.2.14. $\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{1}{2}x^3\right)+C.$

4.2.15. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$

4.2.16. $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C.$

4.2.17. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

4.2.18. $-\arcsin\frac{2-x}{3}+C.$

4.2.19. $\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C.$

4.2.20. $\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right|+C.$

4.2.21. $e^x-\ln(1+e^x)+C.$

4.2.22. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right|+C.$

4.2.23. $\arctan \ln x+C$.

4.2.24. $\frac{2}{3(a-b)}[(\ln x+a)^{3/2}+(\ln x+b)^{3/2}]+C$.

4.2.25. $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}-2\sqrt{1+\ln x}+C$.

4.2.26. $2\arctan \sqrt{x}+C$.

4.2.27. $2\arcsin \sqrt{x}+C$.

4.2.28. $\frac{2}{3}\arcsin \frac{\sqrt{x^3}}{2}+C$.

4.2.29. $\frac{1}{\lambda+1}\ln(x^{\lambda+1}+\sqrt{1+x^{2\lambda+2}})+C$.

4.2.30. $-4\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}+C$.

4.2.31. $\frac{x^{15}}{15(x^5+1)^3}+C$.

4.2.32. $\frac{1}{a}\ln|x|-\frac{1}{an}\ln|x^n+a|+C$.

4.2.33. $-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5}+C$.

4.2.34. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x+C$.

4.2.35. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}+C$. 4.2.36. $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$.

4.2.37. $\frac{1}{3}(\sin x+\cos x)^3+C$.

4.2.38. $\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)+C$.

4.2.39. $\frac{1}{2}\cos^2 x-2\cos x+3\ln(2+\cos x)+C$.

4.2.40. $-\frac{1}{4\sin x}+\frac{1}{8}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$.

4.2.41. $\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+\ln|\csc x-\cot x|+C$.

4.2.42. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{2}-\cos x}+$

$\arctan\sin x+C.$

4.2.43. $\arctan x+\frac{1}{3}\arctan(x^3)+C.$

4.2.44. $\ln|\arctan(x+1)|+C.$

4.2.45. $\frac{1}{\sin\alpha}\arctan\left|\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|+C.$

4.2.46. $3\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|-\sqrt{x^2+4x+3}+C.$

4.2.47. $\frac{x-6}{2}\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{13}{2}\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C.$

4.2.48. $\frac{1}{2(\ln 5-\ln 3)}\ln\left|\frac{5^x-3^x}{5^x+3^x}\right|+C.$

4.2.49. $2\sqrt{1+\ln x}+\ln\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}+C.$

4.2.50. $-\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}-2\arcsin\frac{2+\ln x}{\sqrt{5}}+C.$

4.2.51. $\arcsin e^x+e^x\sqrt{1-e^{2x}}+C.$

4.2.52. $\ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1)-x+C.$

4.2.53. $-\frac{1}{\lambda+1}[a-\sin(\ln x)]^{\lambda+1}+C.$

4.2.54. $\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C.$

4.2.55. $\ln(x+a)\ln(x+b)+C.$

4.2.56. $\frac{1}{1-2\lambda}(\sin x+\cos x)^{1-2\lambda}+C.$

三（第 80 页）

4.3.1. $\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\left(\ln x-\frac{1}{\lambda+1}\right)+C.$

4.3.2. $\frac{1}{3}(x^3+1)\ln(1+x)-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x+C.$

4.3.3. $x\ln(x^2+4)-2x+4\arctan\frac{x}{2}+C.$

4.3.4. $-\frac{1}{2x^2}\left(\lg x+\frac{1}{2\ln 10}\right)+C.$

4.3.5. $\frac{1}{2}(x^2+4)\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}x^2+C$.

4.3.6. $2\sqrt{x+1}\ln(x+1)-4\sqrt{x+1}+C$.

4.3.7. $\tan x\ln\cos x+\tan x-x+C$.

4.3.8. $x\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arcsin x+C$.

4.3.9. $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}+C$.

4.3.10. $\frac{1}{4}(x^4-1)\arctan x-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{4}x+C$.

4.3.11. $\frac{1}{2}(x^2+1)(\arctan x)^2-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$+C$.

4.3.12. $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+(x^2-2x)\ln x+x\ln^2 x+C$.

4.3.13. $-e^{-x}\arctan e^x+x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$.

4.3.14. $\frac{1}{2}(x^2-1)\arctan\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{6}\sqrt{x^3}+C$.

4.3.15. $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C$.

4.3.16. $\frac{1}{10}(\cos 2x-2\sin 2x-5)e^{-x}+C$.

4.3.17. $\frac{1}{13}(3\sin 3x-2\cos 3x)e^{-2x}+C$.

4.3.18. $\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{3x-2}$

$+\frac{4\sqrt{2}}{3}\arctan\sqrt{\frac{3x-2}{2}}+C$.

4.3.19. $-\frac{2}{9}(2a^3+x^3)\sqrt{a^3-x^3}+C$.

4.3.20. $-2(x-1)\sqrt{a^2-e^x}-4a\ln(a+\sqrt{a^2-e^x})+2ax+C$.

4.3.21. $\frac{1}{1+x}e^x+C$.

4.3.22. $-\frac{1}{11}x^2(2-x)^{11}-\frac{1}{66}x(2-x)^{12}$

$-\frac{1}{66\times 13}(2-x)^{13}+C.$

4.3.23. $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+2\right)e^{-\frac{1}{x}}+C.$

4.3.24. $\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\arcsin x+C.$

4.3.25. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln(1-\sqrt{1-x^2})+C.$

4.3.26. $(\sin x-1)e^{\sin x}+C.$

4.3.27. $\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C.$

4.3.28. $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

4.3.29. $\frac{1}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]e^x+C.$

4.3.30. $\frac{1}{4}x\sec^4 x-\frac{1}{12}\tan^3 x-\frac{1}{4}\tan x+C.$

4.3.31. $\frac{1}{x}\sin x+C.$ 4.3.32. $\frac{\sin x}{1+\cos x}e^x+C.$

4.3.33. $\frac{x-2}{x+2}e^x+C.$ 4.3.34. $xe^{x+\frac{1}{x}}+C.$

4.3.35. $-\frac{x}{\ln x}-\frac{x}{\ln^2 x}+C.$

4.3.36. $x\arcsin\sqrt{1-x^2}+\frac{x|x|}{\sqrt{1-x^2}+1}+C.$

4.3.37. $\cos x-\frac{2}{x}\sin x+C.$ 4.3.38. $xe^x\ln x-e^x+C.$

四（第 82 页）

4.4.1. $-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}+C.$

4.4.2. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+13)-\frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3}+C.$

4.4.3. $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C.$

4.4.4. $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$.

4.4.5. $x+\ln(x^2-2x+2)+\arctan(x-1)+C$.

4.4.6. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x-1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

4.4.7. $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2}+C$.

4.4.8. $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C$.

4.4.9. $x+\frac{1}{3}\arctan x-\frac{8}{3}\arctan\frac{x}{2}+C$.

4.4.10. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

4.4.11. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$.

4.4.12. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+C$.

4.4.13. $-\frac{1}{x+1}+\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

4.4.14. $\arctan x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+C$.

4.4.15. $\frac{1}{2-x}-\arctan(x-2)+C$.

4.4.16. $\ln|x|-\frac{2}{3}\ln|1-x^3|+C$.

4.4.17. $-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\arctan x-\frac{x}{2(1+x^2)}+C$.

4.4.18. $\frac{1}{5}\left(\ln\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right|+\frac{1}{x^5+1}\right)+C$.

4.4.19. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}+C$.

4.4.20. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\arctan(x^2)+C$.

4.4.21. $\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

4.4.22. $-\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}\right)-\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C.$

五（第83页）

4.5.1. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+3}{\tan\frac{x}{2}-3}\right|+C.$

4.5.2. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C.$

4.5.3. $\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C.$

4.5.4. $\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C.$

4.5.5. $2(\sec x+\tan x)-x+C.$

4.5.6. $\sin x-\arctan\sin x+C.$

4.5.7. $-\frac{1}{1+\tan x}+C.$

4.5.8. $\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan x\right)+C.$

4.5.9. $\frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan x\right)+C.$

4.5.10. $\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)+\ln(2+\cos x)+C.$

4.5.11. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2}-b+\sqrt{a^2+b^2}}{a\tan\frac{x}{2}-b-\sqrt{a^2+b^2}}\right|+C.$

4.5.12. $\frac{1}{6}\ln(2+3\tan^2x)+C.$

4.5.13. $-\frac{1}{3}\ln|\tan x+1|+\frac{1}{6}\ln(\tan^2 x-\tan x+1)$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

4.5.14. $\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\ln\frac{(\cos x+2\sin x)^2}{|\cos x|}+C.$

4.5.15. $\frac{1}{2}\ln|\tan x|+\frac{1}{2}\tan x+C.$

4.5.16. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln|\sin x-\cos x|+C.$

4.5.17. $2x+\ln|2\sin x+3\cos x|+C.$

4.5.18. $\frac{1}{3}\tan^3 x+2\tan x-\cot x+C.$

4.5.19. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}+C.$

4.5.20. $\frac{1}{2}\ln(1+\sin x\cos x)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x+1}{\sqrt{3}}+C.$

六（第 84 页）

4.6.1. $\frac{1}{15}\sqrt[3]{(1-3x)^5}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{(1-3x)^2}+C.$

4.6.2. $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C.$

4.6.3. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-(x+1)$

$$+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+C.$$

4.6.4. $\frac{3}{5}\sqrt{(1+\sqrt[3]{x^2})^5}-2\sqrt{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}+3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}+C.$

4.6.5. $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+C.$

4.6.6. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C.$

4.6.7. $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$

4.6.8. $\sqrt{x^2-a^2}-a\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$

4.6.9. $-\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}+\frac{5}{8}\arcsin\sqrt{x}+C.$

4.6.10. $-\frac{\sqrt{x+1}}{x}-\ln(\sqrt{x+1}+1)+\frac{1}{2}\ln|x|+C.$

4.6.11. $-\frac{1}{x}\sqrt{2x^2-2x+1}-\ln\left|\frac{1}{x}-1+\frac{1}{x}\sqrt{2x^2-2x+1}\right|$
$+C.$

4.6.12. $\frac{3}{4}\ln(\sqrt[3]{1+x^2}-1)-\frac{1}{2}\ln|x|$
$+\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2\sqrt[3]{1+x^2}+1}{\sqrt{3}}+C.$

4.6.13. $\frac{2}{3}\ln|\sqrt{1+x^3}-1|-\ln|x|+C.$

4.6.14. $\frac{3}{10}\ln|\sqrt[3]{1+x^5}-1|-\frac{1}{2}\ln|x|$
$+\frac{\sqrt{3}}{5}\arctan\frac{2\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}}+C.$

4.6.15. $-\frac{1}{2}\ln|\sqrt[3]{1+x^3}-x|$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt{3}x}+C.$

4.6.16. $\frac{x^2+x-4}{3}\sqrt{x^2-2x-1}-2\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|$
$+C.$

4.6.17. $\frac{3}{2}\arcsin\sqrt[3]{x}+\left(2-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}+C.$

4.6.18. $-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{2(1+x)}\right|+C.$

4.6.19. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2x-1}}{x-1}\right|+C.$

4.6.20. $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C.$

4.6.21. $-\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})$

$$+\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x-1}}+C.$$

七（第 86 页）

4.7.1. $\dfrac{x}{16(x^2+4)^2}+\dfrac{3x}{128(x^2+4)}+\dfrac{3}{256}\arctan\dfrac{x}{2}+C.$

4.7.2. $\dfrac{1}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

4.7.3. $\dfrac{1}{8}\arctan(x^4)-\dfrac{x^4}{8(1+x^8)}+C.$

4.7.4. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+C.$

4.7.5. $-\dfrac{1}{7x^7}+\dfrac{1}{5x^5}-\dfrac{1}{3x^3}+\dfrac{1}{x}-\mathrm{arc\ tan}\,\dfrac{1}{x}+C.$

4.7.6. $x-\dfrac{1}{8}\ln(1+x^4+x^8)-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\arctan\dfrac{2+x^4}{\sqrt{3}\,x^4}+C.$

4.7.7. $-\dfrac{x^5}{10(x^{10}-1)}+\dfrac{1}{20}\ln\left|\dfrac{x^5+1}{x^5-1}\right|+C.$

4.7.8. $\dfrac{2-x}{4(x^2+2)}+\ln\sqrt{x^2+2}-\dfrac{\sqrt{2}}{8}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C.$

4.7.9. $\dfrac{1}{na^2}\ln\left|\dfrac{x^n}{x^n+a}\right|+\dfrac{1}{na(x^n+a)}+C.$

4.7.10. $-\dfrac{2}{n}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^n}}+C.$

4.7.11. $\arctan(x+1)+\dfrac{1}{(x+1)^2+1}+C.$

4.7.12. $\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\sqrt{x(1+x)}-\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$
$+C.$

4.7.13. $\dfrac{x}{2\sqrt{4x-x^2}}+C.$

4.7.14. $\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}+C.$

4.7.15. $-\sqrt{x-x^2}+3\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$.

4.7.16. $-\frac{4+3x^3}{8x(2+x^3)^{2/3}}+C$.

4.7.17. $-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$.

4.7.18. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$.

4.7.19. $x\arctan(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln(x+2+2\sqrt{x})+C$.

4.7.20. $x\arcsin x\arccos x+\sqrt{1-x^2}(\arccos x-\arcsin x)$
$$+2x+C.$$

4.7.21. $-\frac{1}{4}x^2+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+C$.

提示:先换元,较方便.

4.7.22. $\frac{1}{2}[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2-3]\arctan x$
$$-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+\frac{3}{2}x+C.$$

提示:令 $\arctan x$ 或 $\ln(1+x^2)$ 为 $u(x)$.

4.7.23. $-\frac{1}{x}\arcsin x+\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|}+C$.

4.7.24. $2(x-2)\sqrt{1+e^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$.

4.7.25. $x-(1+e^{-x})\ln(e^x+1)+C$.

4.7.26. $-\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\ln[(e^x-1)^2(e^x+2)]+C$.

4.7.27. $x+\ln\left|\frac{x}{1+xe^x}\right|+C$.

4.7.28. $-\frac{x}{2(e^x-1)^2}+\frac{1}{2}\left(x-\ln|e^x-1|-\frac{1}{e^x-1}\right)+C$.

4.7.29. $\frac{\sqrt{1-e^x}-\sqrt{1+e^x}}{2e^x}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1}+C$.

4.7.30. $\frac{1}{4(1+e^{2x})}(e^x-2\arctan e^x)+\frac{1}{4}\arctan e^x+C$.

4.7.31. $\dfrac{x}{x-\ln x}+C$.

4.7.32. $-\dfrac{\ln x}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{4}\ln \dfrac{x^2}{1+x^2}+C$.

4.7.33. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

4.7.34. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}+C$.

4.7.35. $-\dfrac{6x+x^3}{9}-\dfrac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x+C$.

4.7.36. $\dfrac{3x-2x^3}{3(1-x^2)^{3/2}}\arcsin x-\dfrac{1}{6(1-x^2)}+\dfrac{1}{3}\ln(1-x^2)+C$.

4.7.37. $3a^2\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2a}}-\dfrac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+C$.

4.7.38. $\dfrac{1}{x-\tan x}+C$.

4.7.39. $-\dfrac{1}{4}e^{\sin(2x)-2x}+C$.

4.7.40. $a=0,F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+C$;

$a=1,F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$;

$a=-1,F(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x+C$.

4.7.41. $\dfrac{1}{\cos a}\ln\left|\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\cos\dfrac{x+a}{2}}\right|+C$.

4.7.42. $\dfrac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\dfrac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C$.

4.7.43. $-\dfrac{1}{(b-a)^4}\left[\dfrac{b-a}{x+a}+3\ln\left|\dfrac{x+a}{x+b}\right|+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^2\right.$

$\left.-3\dfrac{x+a}{x+b}\right]+C$. 提示：令 $x+a=\dfrac{1}{t}$.

4.7.44. $2\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}+C$.

4.7.45. $\ln\left|x+\frac{a+b}{2}+\sqrt{(x+a)(x+b)}\right|+C.$

4.7.46. $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$

4.7.47. $\frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}$

$$+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$$

4.7.48. $2\ln|x+\sqrt{x^2+x+1}|-\frac{3}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$

$$+\frac{3}{2(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})}+C.$$

4.7.49. $\ln\left|\frac{1+x+\sqrt{1-2x-x^2}}{2+x}\right|-2\arctan\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$

$$+C.$$

4.7.50. $\ln|2x+1+2\sqrt{x(1+x)}|$

$$+\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+1-\sqrt{5x(1+x)}}{2-(1+\sqrt{5})x}\right|+C.$$

4.7.51. $I_1=\frac{1}{2}\left[\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)\right.$

$$\left.-\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})\right]+C;$$

$$I_2=\frac{1}{2}\left[\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)\right.$$

$$\left.+\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})\right]+C.$$

4.7.52. $f(x)=-\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+2\sqrt{x-x^2}}{1-2x}\right|+C.$

4.7.53. $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x-\frac{1}{2}\sin 2x+1}}.$

第 五 章

一（第 90 页）

5.1.1. $\frac{63}{2}$.　　　　5.1.2. $\frac{25}{2}g$.

5.1.3. $W=\int_R^{R+h} mg\frac{R^2}{r^2}\mathrm{d}r$.

5.1.4. (1) $\frac{a-1}{\ln a}$;　　　　(2) $v_0T+\frac{1}{2}gT^2$.

二（第 90 页）

5.2.2. (1) $\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x$ 较大；(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x$ 较大；

(3) $\int_1^e(x-1)\mathrm{d}x$ 较大；　　　　(4) $\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$ 较大；

(5) $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^x\mathrm{d}x$ 较大.

5.2.3. (1) $-\frac{3}{4}\leqslant\int_1^4(x^2-3x+2)\mathrm{d}x\leqslant 18$;

(2) $\frac{\pi}{2}\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{2}e$;

(3) $\frac{1}{2}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$;　(4) $1\leqslant\int_0^2\frac{5-x}{9-x^2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{6}{5}$.

5.2.5. 0.

5.2.7. 提示：对 $F(x)=xf(x)$运用罗尔定理.

5.2.8. 提示：由 $1\leqslant f(x)\leqslant 2$ 可得 $f(x)+\frac{2}{f(x)}\leqslant 3$，注意不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

5.2.12. 提示：对任意实数 λ 有$\int_a^b[1-\lambda f(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 0$.

5.2.13. 提示：对任意实数 λ 有$\int_a^b\left[\sqrt{f(x)}+\frac{\lambda}{\sqrt{f(x)}}\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 0$.

5.2.14. 提示：对任意实数 λ 有 $\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2 dx \geqslant 0$.

三（第 93 页）

5.3.1. $-\frac{1}{6}$.

5.3.2. -2.

5.3.3. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$.

5.3.4. $f(1)$.

5.3.5. $-t^2$.

5.3.6. $f(x)=x$.

5.3.7. $\frac{1+\cos^2(y-x)}{\cos^2(y-x)-2y}$.

5.3.8. $\frac{2\sin(x^2)}{x}$.

5.3.10. 极小值 $f(0)=0$，拐点为 $\left(1,1-\frac{2}{e}\right)$.

5.3.11. $\frac{29}{6}$.

5.3.12. $\frac{1}{6}(a-b)^3$.

5.3.13. $-\frac{17}{5}$.

5.3.14. $\sqrt{3}-1+\frac{\pi}{12}$.

5.3.15. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$.

5.3.16. $\frac{1}{1+\ln a}(ae-1)$.

5.3.17. 1.

5.3.18. $2\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

5.3.19. $\frac{4}{15}(2+\sqrt{2})$.

5.3.20. e^4+e^2-2.

5.3.21. $2\sqrt{2}-2$.

5.3.22. -1.

5.3.24. $\ln 2$.

5.3.25. $\frac{\pi}{4}$.

5.3.26. -1.

5.3.27. $-\frac{1}{4}f(0)$.

5.3.28. $a=4,b=1$.

5.3.29. $\frac{1}{2}$.

5.3.30. $\frac{1}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)$.

5.3.31. (2)2,5.

5.3.33. (1) $C=0$； (2) $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

5.3.35. (1) $(-\infty,+\infty)$； (2) 可导，$f'(0)=0$.

5.3.37. 极大值 $f(-a)=\frac{4}{3}a^3$，极小值 $f(a)=0$.

5.3.38. (1) 极小值点 $x=2n\pi(n\in\mathbb{Z})$,

极大值点 $x=(2n-1)\pi(n\in\mathbb{Z})$.

(2) 1.

5.3.41. 提示:先证明在$\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$上,$f(x)\leqslant M(x-a)$;在$\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$上,$f(x)\leqslant M(b-x)$.

5.3.43. 提示:令

$$F(t)=\frac{t-a}{2}[f(a)+f(t)]-\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,$$

证明 $F(b)>0$. 或先证:$f(x)\leqslant f(b)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

5.3.44. $f(x)=\ln x+1$.

5.3.45. $F(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{4}, & x<-1, \\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{4}, & x>1. \end{cases}$

5.3.46. $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(b^3-a^3), 0\leqslant a<b, \\ \dfrac{1}{3}(a^3+b^3), a<0<b, \\ \dfrac{1}{3}(a^3-b^3), a<b\leqslant 0. \end{cases}$

5.3.47. $(|a|+1)\mathrm{e}^{-|a|}-(|b|+1)\mathrm{e}^{-|b|}$.

5.3.48. $\begin{cases} \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\alpha, & \alpha<0, \\ \dfrac{1}{3}\alpha^3-\dfrac{1}{2}\alpha+\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant\alpha\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2}\alpha-\dfrac{1}{3}, & \alpha>1. \end{cases}$

5.3.49. 当 $x=1$ 时,$\dfrac{n(n+1)}{2}$;当 $x\neq 1$ 时,

$$\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

5.3.50. $1+\frac{2}{3}\sqrt{2}$.　　5.3.51. $f(x)=\sqrt{x}-1$.

5.3.52. $f(x)=-x+1,\varphi(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x$

或 $f(x)=-x-2,\varphi(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-6$.

5.3.53. $\frac{4}{e}$.

5.3.54. 提示:令 $x=n\pi+t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$.

5.3.55. 提示:先证 $f(x)\equiv c$ 的情形.

5.3.56. 提示:先证明 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x}\int_x^{2x}f(t)\mathrm{d}t$.

5.3.57. (1) $\frac{-e^{-x}}{1+x}$.　　5.3.58. $3(\ln x+1)$.

5.3.59. $2(1+x)e^x$.　　5.3.60. $2f(x)$.

四(第 99 页)

5.4.1. $\frac{5}{64}\pi-\frac{1}{8}$.　　5.4.2. $\frac{2}{7}$.

5.4.3. $\ln\frac{2e}{1+e}$.　　5.4.4. $\arctan e-\frac{\pi}{4}$.

5.4.5. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

5.4.6. $\frac{1}{2}\arctan\left(1+\frac{e}{2}\right)-\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{2}$.

5.4.7. $\ln\frac{3}{2}$.　　5.4.8. $\ln\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2}+1)\right]$.

5.4.9. $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$.　　5.4.10. $\frac{3}{16}\pi$.

5.4.11. $\frac{8}{35}$.　　5.4.12. $\frac{1}{3\sqrt{3}}\pi$.

5.4.13. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.　　5.4.14. 12.

5.4.15. $\frac{1}{a}\ln\frac{3}{2}$.　　5.4.16. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$.

5.4.17. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$.　　5.4.18. $\frac{1}{2}\ln 2-1+\frac{\pi}{4}$.

5.4.19. $\frac{8}{15}(\sqrt{2}+1)$.　　5.4.20. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2-\sqrt{3})$.

5.4.21. $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

5.4.22. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

5.4.23. $1-\frac{\pi}{4}$.　　5.4.24. $\frac{5}{8}\pi a^4$.

5.4.25. $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$.　　5.4.26. $\frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(1+\frac{\pi}{12}\right)$.

5.4.27. $\frac{5}{16}\pi$.　　5.4.28. $\sin\frac{\pi^2}{4}-\ln\left(1+\sin\frac{\pi^2}{4}\right)$.

5.4.29. $\frac{\pi}{6}+2-\frac{5}{4}\sqrt{3}$.　5.4.30. $\frac{1}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}$.

5.4.31. $\frac{\pi}{4}$.　　5.4.32. $\frac{\pi^2}{32}$.

5.4.33. $\frac{\pi}{4}$.　　5.4.34. $1-\frac{\pi}{4}$.

5.4.35. $\frac{1}{\pi}\ln 2$. 提示：令 $x=\frac{\pi}{2}-t$.

5.4.36. $\ln(1+\mathrm{e})$.

5.4.37. $\ln 2$.

5.4.39. (1) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sqrt{2}-1$；(2) $\ln(1+\sqrt{2})>\sqrt{2}-1$.

5.4.42. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.　　5.4.43. 2.

5.4.44. $\frac{1}{4}\pi^2$.　　5.4.48. $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$.

5.4.49. $f(x)=3x-3\sqrt{1-x^2}$ 或 $f(x)=3x-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$.

5.4.50. $\frac{\pi}{8}\ln 2$.　　5.4.51. $\frac{\pi}{8}\ln 2$.

5.4.52. $\frac{1}{8}(\pi+2)$. 5.4.53. $4\sqrt{2}n$.

5.4.54. $F(x)=\begin{cases} x-\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ x-1, & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

5.4.58. $F(y)=\begin{cases} 1, & y\leqslant 0, \\ 2-y-e^{-y}, & 0<y\leqslant 1, \\ (e-1)e^{-y}, & y>1. \end{cases}$

5.4.59. $\frac{1}{2}\ln^2 x$. 5.4.60. e^x.

五（第 103 页）

5.5.1. π^2. 5.5.2. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

5.5.3. $\pi^3-6\pi$. 5.5.4. $6-2e$.

5.5.5. $\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi-1$.

5.5.6. $x\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-2a\ln(2+\sqrt{3})a-\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{3}a$.

5.5.7. $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

5.5.8. $\frac{1+\ln 2}{1-2e}-\frac{1}{1-e}+\ln\frac{1-2e}{2-2e}$.

5.5.9. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+2\ln(\sqrt{2}+1)$. 5.5.10. $\frac{\pi}{2}$.

5.5.11. $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{4}\right)\pi+\frac{1}{2}\ln 2$. 5.5.12. $\sqrt[4]{8}(e^{\frac{\pi}{8}}-e^{-\frac{\pi}{8}})$.

5.5.13. $\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^2$. 5.5.14. $\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$.

5.5.15. $I_1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\pi^2\right)$, $I_2=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}\pi^2-\frac{1}{2}\right)$.

5.5.16. $\frac{1}{2}(e^{-1}-1)$. 5.5.17. $\frac{1}{2}(\cos(1)-1)$.

六（第 104 页）

5.6.1. （1）0.694；（2）5.342.

5.6.2. （1）1.229；（2）1.089.

5.6.3. -5.698；-5.698；-6.331.

5.6.4. 3.040 或 3.240；3.140；3.142.

5.6.5. 0.9573.

七（第 105 页）

5.7.1. 发散.

5.7.2. $\frac{\pi}{2}$.

5.7.3. 1.

5.7.4. $\frac{1}{2}$.

5.7.5. $\frac{1}{2}$.

5.7.6. $\frac{\pi}{3}$.

5.7.7. π.

5.7.8. 发散.

5.7.9. 发散.

5.7.10. 发散.

5.7.11. $3(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a})$.

5.7.12. $(-1)^n n!$.

5.7.13. 当 $k<1$ 时，积分收敛于 $\frac{1}{1-k}(b-a)^{1-k}$；当 $k\geqslant 1$ 时，积分发散.

5.7.14. 当 $k>0$ 时，积分收敛于 $\frac{k}{k^2+b^2}$；当 $k\leqslant 0$ 时，积分发散.

5.7.15. $\frac{1}{4}$.

5.7.16. $\frac{2}{a(a^2+4)}$.

5.7.17. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

5.7.18. π.

5.7.19. $1+\frac{\pi}{4}$.

5.7.20. $\frac{\pi}{2}$.

5.7.21. $I_n=\begin{cases} 2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数；} \\ 2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1的正奇数.} \end{cases}$

5.7.22. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$. 5.7.24. (1) $\left(1+\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\right)e$.

5.7.25. $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x, & 0<x\leqslant 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

5.7.26. $\frac{(-1)^n n!}{(\lambda+1)^{n+1}}$.

5.7.27. $\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$.

5.7.28. π. 5.7.29. $\frac{1}{2}(a+b)\pi$.

5.7.30. $\frac{\pi}{4}$.

八（第 108 页）

5.8.1. 发散． 5.8.2. 收敛． 5.8.3. 收敛．

5.8.4. 当 $n>m+1$ 时收敛，当 $n\leqslant m+1$ 时发散．

5.8.5. 发散．

5.8.6. 当 $p<1$ 时发散，当 $p=1$ 且 $q>1$ 时收敛，当 $p=1$ 且 $q\leqslant 1$ 时发散，当 $p>1$ 时收敛．

5.8.8. 当 $0<p<1$ 且 $0<q<1$ 时收敛，其余情形发散．

5.8.9. 收敛． 5.8.10. 收敛．

5.8.11. 当 $1<p<2$ 时收敛，其余情形发散．

5.8.12. 收敛．提示：利用

$$0\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\leqslant\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)},$$

证明$\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]dx$ 收敛；又$\int_0^1\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ 收敛．

5.8.13. 当 $q<1$ 且 $p>1$ 时收敛，其余情形发散．

第 六 章

一（第110页）

6.1.1. $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

6.1.2. $\frac{256}{3}$.

6.1.3. $\frac{128}{5}$.

6.1.4. 2.

6.1.5. $\frac{16}{3}$.

6.1.6. $\frac{9}{2}$.

6.1.7. $2-\ln 3$.

6.1.8. $\frac{5}{2}$.

6.1.9. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

6.1.10. $\frac{a^2}{4}\ln(2+\sqrt{3})$或$\frac{a^2}{4}\ln\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right)$.

6.1.11. $\frac{5}{4}\pi-2, 2-\frac{\pi}{4}$.

6.1.12. $\frac{3}{2}\pi$.

6.1.13. $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\pi$.

6.1.14. $\frac{23}{12}$.

6.1.15. $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

6.1.16. $\frac{5}{2}$.

6.1.17. $\frac{11}{4}$.

6.1.18. $2(\pi-\sqrt{3})$.

6.1.19. $a=\frac{4}{3}, b=\frac{5}{12}$.

6.1.20. $x=-2$.

6.1.21. $\left(\frac{16}{3}, \frac{256}{9}\right)$.

6.1.22. $\frac{4}{3}$.

6.1.23. $\frac{1}{4}\pi a^2$.

6.1.24. a^2.

6.1.25. $\frac{1}{2}\pi a^2$.

6.1.26. $\left(\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2$. 提示：化成极坐标.

6.1.27. $\pi-6+3\sqrt{3}$.

6.1.28. $4ab\arctan\frac{b}{a}$.

6.1.29. $(r,\theta)=\left(\sqrt[4]{12},\frac{\pi}{12}\right)$.

6.1.31. $\frac{1}{2}e^2-e$.

6.1.32. $y=\frac{1}{4}x+\ln 4-1$.

6.1.33. $y=\frac{1}{2}$.

6.1.34. $\frac{1}{3}(a_1-a_0)(b_1-b_0)$.

6.1.36. $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{2x}$.

6.1.37. $x=\frac{3}{4}\sqrt{y}$.

6.1.38. $a=\frac{1}{2},S=\frac{1}{12}$.

二（第114页）

6.2.1. $\frac{1}{3}(4\sqrt{2}-2)\pi ab^2,\frac{4}{3}\pi a^2b$.

6.2.2. $\frac{1}{2}\pi a,2\pi a^2$.

6.2.3. $\frac{512}{15}\pi$.

6.2.4. 160π.

6.2.5. $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\right)\pi a^3$.

6.2.6. $a=\frac{12}{7}$.

6.2.7. $\sqrt[5]{h^5+200mp^2/\pi}-h$.

6.2.8. $\frac{1000}{3}\sqrt{3}$.

6.2.9. $4\sqrt{3}$.

6.2.10. $\frac{4}{3}\pi$.

6.2.11. $\frac{1}{6}\pi$.

6.2.12. $\frac{1}{2}l$.

6.2.13. $t=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

6.2.14. $a=0,b=A$.

6.2.15. $\frac{1}{2a}(h-a)^2$.

6.2.16. (1) $\frac{27}{12}$; (2) $\frac{81}{10}\pi$.

6.2.17. (2) $4:3$.

6.2.18. (1) $a=\frac{-4+\sqrt{66}}{5}$; (2) $\frac{17}{25}\pi$.

6.2.19. $a=3$.

6.2.20. $\sqrt{4-\sqrt[3]{16}}$.

6.2.21. $f(x)=x\sqrt{\ln(x+1)+\frac{2x+1}{3x+3}}$.

6.2.22. $m=1,n=2$.

6.2.23. $\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$.

三（第 117 页）

6.3.1. $\frac{1}{4}(1+e^2)$.

6.3.2. $\ln(3)-\frac{1}{2}$.

6.3.3. $\ln(1+\sqrt{2})$.

6.3.4. $\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$.

6.3.6. $\frac{5}{2\pi}[20\pi\sqrt{1+400\pi^2}+\ln(20\pi+\sqrt{1+400\pi^2})]$ mm.

6.3.7. $\frac{m}{2}\left|\ln\tan\frac{\varphi}{4}-\cot\frac{\varphi}{2}\csc\frac{\varphi}{2}\right|$.

6.3.8. 4.

6.3.9. $\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}a,\frac{1}{8}a\right)$.

6.3.10. $2+\frac{1}{2}\ln 3$.

6.3.11. $4a\left(1+3\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$. 提示：设 $y=tx$ 引入参数方程.

6.3.12. $y=\frac{1+e^{2x}}{2e^x}$ 或 $y=\frac{1+e^{-2x}}{2e^{-x}}$.

6.3.14. $\frac{52}{21}\pi, 4\sqrt{2}\pi+4\pi\left[\frac{13\sqrt{13}}{27}\cdot\frac{19}{45}+\frac{4}{15}\left(\frac{4}{9}\right)^2\right]$.

四（第 118 页）

6.4.1. $2450\pi r^4$(J).

6.4.2. 80.85π(kJ).

6.4.3. 0.225(J).

6.4.4. $\frac{2}{3}a^2b\gamma$（γ 为单位体积水的重量）.

6.4.5. $\frac{1}{6}a^2b\gamma, \frac{1}{3}a^2b\gamma$.

6.4.6. $\pi RH^2\gamma$.

6.4.7. 7.35 kN.

6.4.8. $kq\rho\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{l+s}\right)$, $kq\rho\ln\frac{a+l}{a}$.

6.4.9. $\frac{1}{3}\pi^2$.

6.4.10. $\frac{25}{14}$.

6.4.11. $\frac{kamM}{(R^2+a^2)^{3/2}}$, $\frac{kmM}{(R^2+a^2)^{1/2}}$.

6.4.12. $\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}R$.

6.4.13. (1) 6468(kN); (2) 19 m.

6.4.14. 距水面$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ m 及$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ m.

6.4.15. $3.4\gamma h^3$, $0.2\gamma h^3$.

6.4.16. $b=\frac{1}{3}l$, $h=\frac{2}{3}l$.

6.4.17. $|\boldsymbol{F}|=\frac{\sqrt{5}k\rho m}{4l}$, $\boldsymbol{F}$ 和 x 轴正向夹角 $\theta=\arctan\frac{1}{2}$.

6.4.18. P 点距 B 点$\frac{4}{3}$.

6.4.19. $\frac{kM_1M_2}{l_1l_2}\ln\frac{(a+l_1)(a+l_2)}{a(a+l_1+l_2)}$.

6.4.20. $2\pi k\rho ma\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+r_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+r_2^2}}\right)$.

6.4.21. $\frac{81536}{15}\pi$(kJ).

6.4.22. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6.4.23. $\frac{4R}{3\pi}$.

6.4.24. (1) $\frac{30}{\pi(2Ry-y^2)}$ cm/s; (2) $\frac{1}{45}\pi R^3$ s;

(3) $\frac{8-5\sqrt{2}}{12}\pi R^3$ cm^3.

第 七 章

一 (第 122 页)

7.1.1. (1) 在 x 轴上; (2) 在 y 轴上;

(3) 在 z 轴上；　　　　(4) 在 yOz 平面上；

(5) 在 zOx 平面上；　　(6) 在 xOy 平面上.

7.1.2. $C\left(1,\frac{3}{2},3\right),R=\frac{7}{2}$.

7.1.3. $A(-13,5,-3),B(-6,4,0),C(-2,1,-1)$,

$D(-7,2,-4)$.

7.1.4. $\sqrt{b^2+c^2},\sqrt{c^2+a^2},\sqrt{a^2+b^2};c,a,b$.

7.1.5. (1) 在 zOx 和 yOz 平面所成的二面角的角平分面上；

(2) 在 zOx、yOz 平面所成的二面角的角平分面与 zOx、xOy 平面所成的二面角的角平分面的交线上.

二（第 122 页）

7.2.6. $C(4,1,6)$.

7.2.7. $\lambda\left(\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}\right)$，其中 $\lambda\in\mathbb{R}$.

7.2.9. $A\left(\frac{14}{3},-8,12\right)$，　$B\left(-\frac{11}{3},7,-13\right)$，

$D\left(\frac{4}{3},-2,2\right)$，　$E\left(-\frac{1}{3},1,-3\right)$.

7.2.10. $\lambda=\frac{7}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{5}$；$\left(\frac{32}{9},\frac{11}{3},0\right)$，$(0,-7,16)$，

$\left(\frac{7}{3},0,\frac{11}{2}\right)$.

7.2.11. $\overrightarrow{BC}=b-\frac{|b|}{|a|}a$，　$\overrightarrow{CD}=-\left(a-\frac{|b|}{|a|}a\right)$.

7.2.13. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(a-b)$，　$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(a+b)$，　$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(b-a)$，　$\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}(a+b)$.

7.2.14. $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(4b-2a),\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}(4a-2b)$.

7.2.15. $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b$，　$\overrightarrow{AD}=a+b$，　$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(b-a)$，

$\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

7.2.17. $(1,-2,8)$或$(5,0,-4)$或$(-3,4,-4)$.

三（第125页）

7.3.1. $|\boldsymbol{a}|=2$; $\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}$;

$\boldsymbol{a}^{\circ}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2})$.

7.3.2. (1) $6,10,-2$; (2) $1,8,5$;

(3) $16,0,-23$; (4) $3m+2n,5m+2n,-m+3n$.

7.3.3. $(11,-13,-8)$; $-9,12,11$.

7.3.4. $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{2}$或$\alpha=\beta=\frac{\pi}{2},\gamma=\pi$.

7.3.5. $\left(\frac{4}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$,或$\left(-\frac{4}{\sqrt{3}},-\frac{4}{\sqrt{3}},-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

7.3.6. 1.

7.3.7. (1) $(-1,3,3)$; (2) $2\sqrt{3}$.

(3) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7.3.8. $B(18,17,-17)$.

7.3.9. $(-48,45,-36)$.

7.3.10. $M(3\sqrt{2},3,-3)$.

7.3.11. $x=2,y=3,z=5$.

7.3.12. $\boldsymbol{a}=\frac{3}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}-\frac{1}{3}\boldsymbol{d}$,

$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

7.3.13. $\lambda=\pm\frac{1}{3},\mu=\pm\frac{2}{3}$;$\boldsymbol{d}=\pm\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$.

7.3.14. $(-3,15,12)$或$-(-3,15,12)$.

四（第126页）

7.4.1. (1) 2; (2) -219;

(3) $\sqrt{5}$、$\sqrt{26}$、$\dfrac{2}{\sqrt{130}}$;

(4) $\dfrac{2}{\sqrt{26}}$.

7.4.2. $(5,-1,0)$, $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

7.4.3. $2x+2y+3z-7=0$.

7.4.4. $\left(1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

7.4.5. 104.

7.4.6. $\dfrac{2\pi}{3}$.

7.4.7. $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$.

7.4.8. 2.

7.4.9. (1) $(3,-7,-5)$;

(2) $(-42,98,70)$;

(3) $(0,-1,-2)$;

(4) $(-1,0,4)$;

(5) $(-3,2,0)$.

7.4.10. 60.

7.4.11. ± 30.

7.4.12. (1) $(5,0,5)$;

(2) $(1,-2,-1)$.

7.4.13. -15.

7.4.16. 27.

7.4.17. 25.

7.4.21. $\pm\left(\dfrac{15}{\sqrt{17}},\dfrac{25}{\sqrt{17}},0\right)$.

7.4.22. $(14,10,2)$.

7.4.23. $(-4,-6,12)$.

7.4.24. $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

7.4.25. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

7.4.26. $\pm(-1,1,2)$.

7.4.27. $\lambda=-\dfrac{6}{25}$.

7.4.30. -47.

7.4.31. 10.

7.4.32. $2(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}-\boldsymbol{a}$.

7.4.33. 5.

7.4.35. $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(-7,-3,10)$.

7.4.37. $S=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1|$.

7.4.46. $\overrightarrow{ED}=\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}$.

7.4.47. $\dfrac{\pi}{3}$.

7.4.50. 提示:用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 分别表示 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$.

7.4.51. 提示:利用 7.4.14 题的结论.

7.4.52. $\boldsymbol{x}=\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)$.

五（第 131 页）

7.5.1. $3x^2+3y^2+3z^2-48x-26y+8z+123=0$.

7.5.2. $x^2+y^2=-8(z-2)$.

7.5.3. $x^2=10\left(z-\frac{5}{2}\right)$.

7.5.4. (1) 由$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=0\end{cases}$绕 x 轴旋转而成；

(2) 由$\begin{cases}z=2x^2,\\y=0\end{cases}$绕 z 轴或由$\begin{cases}z=2y^2,\\x=0\end{cases}$绕 z 轴旋转而成；

(3) 由$\begin{cases}4x^2+z^2=36,\\y=0\end{cases}$，绕 z 轴或由$\begin{cases}4y^2+z^2=36,\\x=0\end{cases}$绕 z 轴旋转而成；

(4) 由$\begin{cases}x^2-2z^2=1,\\y=0\end{cases}$绕 z 轴或由$\begin{cases}y^2-2z^2=1,\\x=0\end{cases}$绕 z 轴旋转而成；

(5) 由$\begin{cases}\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=-1,\\y=0\end{cases}$绕 z 轴或由$\begin{cases}\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=-1,\\x=0\end{cases}$绕 z 轴旋转而成；

7.5.5. (1) $(x-2)^2+y^2+z^2=1$；

(2) $\frac{z^2}{4}-\frac{x^2+y^2}{9}=1$，$\frac{x^2+z^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$；

(3) $y^2+z^2=2px$，$z^4=4p^2(x^2+y^2)$；

(4) $4(y-2)^2=9(x^2+z^2)$.

7.5.6. (1) 球面；　(2) 圆柱面；

(3) 两相交平面；　(4) z 轴；

(5) 三坐标平面；　(6) 过 x 轴的平面；

(7) 两平行平面；　(8) 椭圆柱面；

(9) 双曲柱面；　(10) 抛物柱面；

(11) 圆锥面.

六（第132页）

7.6.1. $\begin{cases}2x-14y-2z+1=0,\\ x+7y-8z+16=0.\end{cases}$

7.6.2. $\begin{cases}4x^2+4y^2=(z-1)^2,\\ (x-2)^2+(y+1)^2+z^2=1.\end{cases}$

7.6.3. (1) $\begin{cases}x^2+y^2=16,\\ 3x-4y=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+y=a,\\ (x-y)^2+z^2=a^2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}y=(x-1)^2,\\ z=2x-1.\end{cases}$

7.6.4. (1) 直线； (2) 直线；

(3) 圆； (4) 椭圆；

(5) 抛物线； (6) 双曲线；

(7) 半圆.

7.6.5. (1) 椭圆；

(2) 椭圆(与 xOy 面)，双曲线(与 yOz 面或 zOx 面)；

(3) 双曲线(与 xOy 面或 zOx 面)，设有交线(与 yOz 面)；

(4) 一点(与 xOy 面)，抛物线(与 zOx 面或 yOz 面)；

(5) 两相交直线(与 xOy 面)，抛物线(与 zOx 面或 yOz 面)；

(6) 一点(与 xOy 面)，两相交直线(与 zOx 面或 yOz 面).

7.6.6. $\begin{cases}y^2+(2z-3a)^2=a^2,\\ x=0.\end{cases}$

7.6.7. $\begin{cases}2x-y+5=0,\\ z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}3y+z-1=0,\\ x=0;\end{cases}$ $\begin{cases}6x+z+14=0,\\ y=0.\end{cases}$

7.6.8. $5x^2-3y^2=1.$

7.6.9. $\begin{cases}x^2+2y^2-2y=0,\\ z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}y+z=1,\\ x=0\end{cases}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$;

$\begin{cases}x^2+2z^2-2z=0,\\ y=0.\end{cases}$

7.6.10. $\begin{cases}x^2+y^2-2ax=0,\\z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}z^4+4a^2(y^2-z^2)=0,\\x=0;\end{cases}$

$\begin{cases}z^2+2ax=4a^2,\\y=0\end{cases}(x\geqslant 0).$

7.6.11. $\begin{cases}y^2+z^2=4z,\\y^2+4x=0.\end{cases}$ 7.6.12. $\begin{cases}3x+2y=7,\\z=0.\end{cases}$

七（第 134 页）

7.7.1. (1) $k=2$; (2) $k=1$;

(3) $k=-\frac{7}{3}$; (4) $k=\pm\frac{1}{2}\sqrt{70}$;

(5) $k=\pm 2$; (6) $k=-3$.

7.7.2. $\left(0,\frac{73}{12},0\right)$ 或 $\left(0,-\frac{73}{282},0\right)$.

7.7.3. $9x-y+3z-16=0$.

7.7.4. $2x-y-3z=0$.

7.7.5. $\sqrt{2}x-y+z-1=0$ 或 $\sqrt{2}x+y-z+1=0$.

7.7.6. $x+3y=0$ 或 $3x-y=0$.

7.7.7. $8x+12y+8z-45=0$.

7.7.8. $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$.

7.7.9. $2x-3y+z-6=0$.

7.7.10. $6x+2y+3z+42=0$ 或 $6x+2y+3z-42=0$.

7.7.11. $d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; 1.

7.7.12. (1) $6x+3y+2z+7=0$ 或 $6x+3y+2z-7=0$;

(2) $6x+3y+2z+33=0$ 或 $6x+3y+2z-9=0$;

(3) $6x+3y+2z-20=0$.

7.7.13. $x-2y+z-3=0$ 或 $x-2y+z-5=0$.

7.7.14. $x-7y+14z-26=0$ 及 $7x+5y+2z+10=0$.

7.7.15. $6x+18y+z-12=0$ 或 $6x+18y-z-12=0$.

7.7.16. $3x+2z+10=0$; $-\frac{10}{3}$.

7.7.17. $x+20y-7z=0$ 或 $49x-100y-343z=0$.

7.7.18. $\arccos\frac{25}{13\sqrt{61}}$.

7.7.21. D_1, D_2, D_3 成等差数列.

7.7.23. $x+y+z=0$ 或 $x+y-z=0$.

7.7.24. $a=b=\frac{9}{2}, c=9$; $\frac{2x}{9}+\frac{2y}{9}+\frac{z}{9}=1$.

八（第 137 页）

7.8.1. (1) $\begin{cases} x+z-4=0, \\ y+2=0; \end{cases}$

(2) $\frac{x}{-1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{1}$; (3) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{0}$;

(4) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{1}$.

7.8.2. (1) $\frac{x-2}{9}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-5}{2}$;

(2) $\frac{x+4}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-3}{5}$; (3) $\frac{x-1}{11}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-1}{5}$.

7.8.3. (1) $D_1=D_2=0$; (2) $A_1=A_2=0$;

(3) $\frac{D_1}{B_1}=\frac{D_2}{B_2}$; (4) $C_1=C_2=D_1=D_2=0$.

7.8.4. (1) $-\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{14}$.

7.8.5. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (2) $\sqrt{5}$;

(3) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

7.8.6. (1) $\arcsin\frac{15}{19}, (0,-1,1)$;

(2) $\arcsin\frac{38}{2\sqrt{713}}, \left(-\frac{17}{11}, \frac{47}{11}, \frac{10}{11}\right)$.

7.8.7. $\left(\frac{37}{7},\frac{25}{7},\frac{41}{7}\right)$.

7.8.8. $\left(1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

7.8.9. $(3,3,-3)$.

7.8.10. $(2,9,6)$.

7.8.11. $\lambda=\frac{5}{4}$.

7.8.12. $\frac{x-1}{-18}=\frac{y+2}{13}=\frac{z-5}{26}$.

7.8.13. $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{0}$.

7.8.14. $x+2y+3z=0$.

7.8.15. $x-y+z=0$.

7.8.16. $4x+6y+5z-1=0$.

7.8.17. $16x-15y+13z+14=0$.

7.8.18. $x+8y+6z+11=0$.

7.8.20. $22x-19y-18z-27=0$.

7.8.21. $7x-26y+18z=0$.

7.8.22. $x+7y+5z-20=0$.

7.8.23. $\frac{x-1}{9}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-5}$.

7.8.24. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-5}{22}=\frac{z+9}{2}$.

7.8.25. $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{5}$.

7.8.26. $\frac{x-2}{-11}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{35}$.

7.8.27. $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$.

7.8.28. $\begin{cases}9x+5y-11z-3=0,\\2x+3y+3z-8=0.\end{cases}$

7.8.29. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{6}=\frac{z+2}{-1}$.

7.8.30. $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{15}=\frac{z-3}{4}$及$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$.

7.8.31. $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$.

7.8.32. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{\sqrt{15}}=\frac{z}{-6}$或$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{-\sqrt{15}}=\frac{z}{-6}$.

7.8.33. $\sqrt{\frac{14}{3}}$.

7.8.34. $\frac{x+1}{65}=\frac{y-16}{22}=\frac{z+1}{37}$.

7.8.35. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-9}{4}=\frac{z-6}{5}$.

7.8.36. $\begin{cases}11x+2y-7z+6=0,\\7x+y-5z+7=0.\end{cases}$

7.8.37. $x+2y+z-38=0$.

7.8.38. 1.

7.8.39. $x+3y+3z-26=0$.

7.8.40. (1) $112x+31y+56z-387=0$

或 $2x+2y+z+9=0$;

(2) $2x+2y+z+9=0$;

(3) $2x-3y+z-46=0$.

7.8.41. $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}$或$\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-2}$.

7.8.42. $\frac{x}{1}=\frac{y+\frac{1}{2}}{2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-3}$.

7.8.43. $(2,-4,3)$.

7.8.44. $\begin{cases}2x+y-z+1=0,\\x+y+z+1=0.\end{cases}$

7.8.45. $3x+4y-z+1=0$ 与 $x-2y-5z+3=0$.

7.8.46. (1) $2y-z=0$;

(2) $x+y+2z-16=0$;

(3) $3x-y=0$.

7.8.48. $\begin{cases}2x-3y+5z+21=0,\\x-y-z-17=0.\end{cases}$

7.8.49. (2) $\left(-\frac{15}{2},26,-\frac{7}{2}\right),\left(-\frac{11}{2},26,-\frac{11}{2}\right)$.

7.8.51. $\frac{x-5}{5}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+4}{-1}$.

7.8.52. $\begin{cases}3x-y+4z-12=0,\\x+3y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}3x-y+4z-12=0,\\4y+z=0,\end{cases}$

$\begin{cases}3x-y+4z-12=0,\\4x-3z=0;\end{cases}$ $\frac{3}{5}\sqrt{65},\frac{4}{17}\sqrt{442},\frac{12}{5}\sqrt{26}$.

九（第 144 页）

7.9.1. $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2+a^2z^2-a^2(a^2-c^2)=0$,旋转椭球面.

7.9.2. $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2-a^2z^2-a^2(c^2-a^2)=0$,旋转单叶双

曲面.

7.9.3. 当 $k=1$ 时，$x=0$，平面；

当 $k\neq1$ 时，$\left[x\pm\frac{c(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2+y^2+z^2=\left[\frac{2ck}{1-k^2}\right]^2$，球面.

7.9.4. (1) $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$；

(2) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$；

(3) $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$；

(4) $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$.

7.9.5. $x^2+y^2+z^2+5y-8z+10=0$.

7.9.6. (1) $\begin{cases}\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{25}=\frac{5}{9},\\ x=2,\end{cases}$ 双曲线；

(2) $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1,\\ y=0,\end{cases}$ 椭圆；　　(3) $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2,\\ y=5,\end{cases}$ 椭圆；

(4) $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=0,\\ z=2,\end{cases}$ 及 $\begin{cases}\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=0,\\ z=2,\end{cases}$ 两直线；

(5) $\begin{cases}\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=\frac{3}{4},\\ z=1,\end{cases}$ 双曲线.

7.9.7. (1) 椭球面；　　(2) 椭圆抛物面；

(3) 椭圆抛物面；　　(4) 双叶旋转双曲面；

(5) 锥面；　　(6) 旋转锥面；

(7) 旋转抛物面；　　(8) 双曲抛物面.

7.9.9. $x^2+20y^2-24x-116=0$.

7.9.10. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$.

7.9.11. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$.

7.9.12. $x^2+(y+2)^2+z^2=41$.

7.9.13. (1) $x^2+y^2+z^2=r^2$，球面；

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,椭球面;

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=4z$,双曲抛物面;

(4) $x^2+y^2=2pz$,旋转抛物面.

7.9.14. $(x-1)^2+y^2-z^2=0$,旋转锥面.

7.9.15. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$

或 $x^2+(y+1)^2+(z+5)^2=9$.

7.9.16. $\left(x\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(z\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=a^2$.

7.9.17. $(x+5)^2+(y-3)^2+z^2=121$.

7.9.18. $xyz=\pm\dfrac{3}{4}k$.

7.9.20. $C(-1,2,3)$,$R=8$.

7.9.21. $x^2+y^2+(z-1)^2=1$.

7.9.22. $(x-9)^2+(y+6)^2+(z-3)^2=4$

或$(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$.

7.9.23. $\begin{cases}\dfrac{(x-2)^2}{36}+\dfrac{(y+4)^2}{18}=1,\\ z=0.\end{cases}$

7.9.24. $x^2+y^2-\alpha^2z^2=\beta^2$.

当 $\alpha=0,\beta\neq0$ 时为圆柱面;当 $\alpha\neq0,\beta=0$ 时为圆锥面;当 $\alpha,\beta\neq0$ 时为单叶旋转双曲面.

7.9.25. $387x-164y-24z-421=0$ 及 $3x-4y-5=0$.

7.9.26. $10x-11y-2z+189=0$ 或 $10x-11y-2z-261=0$.

7.9.27. $2x-y-z+5=0$.

第 八 章

一(第 149 页)

8.1.1. $\dfrac{4}{9}$.

8.1.2. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{xy}$.

8.1.3. $(x+y)^{\frac{1}{xy}}+(xy)^{3x+y}$.

8.1.5. $\frac{1}{x^3}-\frac{2}{xy}+\frac{3}{y^3}$.　　8.1.6. $3xy+6x+4y$.

8.1.7. $x+y\neq 0$.

8.1.8. $x>y, y\geqslant 0, x^2+y^2<a^2$.

8.1.9. $x\geqslant 0, 2n\pi\leqslant y\leqslant(2n+1)\pi$ 及

$x\leqslant 0, (2n+1)\pi\leqslant y\leqslant(2n+2)\pi$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

8.1.10. $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

8.1.11. 圆周 $x^2+y^2=a^2$ 除去点 $(0,a),(0,-a),(a,0),(-a,0)$.

8.1.12. $x>0, y>x+1$ 及 $x<0, x<y<x+1$.

8.1.13. $\frac{\pi}{3}(x^2-y^2)y$, $0<y<x<+\infty$.

8.1.14. 2.　　8.1.15. 2.

8.1.16. 不存在.　　8.1.17. 不存在.

8.1.18. $y=x$.

8.1.19. $x=m\pi$ 及 $y=n\pi$ $(m,n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

8.1.20. $\frac{xe^{x-2y}}{y}$.

8.1.21. $z=\sqrt{x}+y-1, f(u)=u^2+2u$.

8.1.22. $y=x^2$ 的上方(不含抛物线上的点)及 $y=-x^2+1$ 的下方(含抛物线上的点).

8.1.23. $x^2-y^2>1, x\leqslant 2-y^2$.

8.1.24. $0<z^2\leqslant x^2+y^2$.　　8.1.25. 0.

8.1.28. 提示:沿 $y=kx^2$ 趋于(0,0)时,极限不存在.

8.1.31. 不存在.

8.1.32. 提示:先验证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y}$ 不存在.

二（第 152 页）

8.2.1. $\frac{2}{5}$.　　　　8.2.2. $\frac{1}{2}$.

8.2.3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8.2.4. $\frac{3}{2}$.

8.2.5. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{2\sqrt{x(1-xy^2)}}, \frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{\frac{x}{1-xy^2}}$.

8.2.6. $\frac{\partial z}{\partial x}=\cot(x-2y), \frac{\partial z}{\partial y}=-2\cot(x-2y)$.

8.2.7. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y}\cos\frac{y}{x}\cos\frac{x}{y}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$.

8.2.8. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}3^{\frac{y}{x}}\ln 3, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}3^{\frac{y}{x}}\ln 3$.

8.2.9. $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{\sin(\pi xy)}[1+\pi xy\cos(\pi xy)]$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{\sin(\pi xy)}[1+\pi xy\cos(\pi xy)]$.

8.2.10. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{(x^2+y^2)\left(\arctan\frac{y}{x}\right)^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{(x^2+y^2)\left(\arctan\frac{y}{x}\right)^2}$.

8.2.11. $u'_x=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, u'_y=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,

$u'_z=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

8.2.12. $u'_x=y^z x^{y^z-1}, u'_y=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x, u'_z=y^z x^{y^z}\ln x\cdot\ln y$.

8.2.13. $u'_x=(3x^2+y^2+z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}, u'_y=2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$,

$u'_z=2xze^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

8.2.14. $\dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi}=e^{\varphi+\theta}[\cos(\varphi-\theta)-\sin(\varphi-\theta)]$,

$\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}=e^{\varphi+\theta}[\cos(\varphi-\theta)+\sin(\varphi-\theta)]$.

8.2.15. $\dfrac{\pi}{6}$.

8.2.20. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a^2\cos 2(ax+by)$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=2ab\cos 2(ax+by)$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2b^2\cos 2(ax+by)$.

8.2.21. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\ln y}{x^2}(\ln y-1)y^{\ln x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{1+\ln x\ln y}{xy}y^{\ln x}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}y^{\ln x}$.

8.2.22. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{2y+xe^y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=(1+xe^y)e^{y+xe^y}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(1+xe^y)e^{y+xe^y}$.

8.2.23. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

8.2.24. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2y}{(1+y^2)^2}$.

8.2.28. $6(x+y+z)$.

8.2.29. (1) $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$.

8.2.30. 在(0,0)处各偏导数不存在，但函数在(0,0)处连续.

8.2.32. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y}=0$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}=-16$.

8.2.33. 0.

8.2.34. $-\dfrac{6}{r^4}+\dfrac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$,

其中 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$.

8.2.35. $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\,\partial y^n}=2(-1)^m(m+n-1)!\,\dfrac{nx+my}{(x-y)^{m+n+1}}$.

8.2.37. 0.

三（第 154 页）

8.3.1. $du=\dfrac{2(s\,dt-t\,ds)}{(s-t)^2}$.　　8.3.2. $dz=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.

8.3.3. $du=\dfrac{3dx-2dy+dz}{3x-2y+z}$.

8.3.4. $du=e^{x(x^2+y^2+z^2)}[(3x^2+y^2+z^2)dx+2xy\,dy+2xz\,dz]$.

8.3.5. $dz=\ln y\,dx+\dfrac{x}{y}dy$.

8.3.6. $\Delta z\approx-0.20404, dz=-0.2$.

8.3.7. $du=dx-dy$.　　8.3.8. $dz=-dx+\dfrac{1}{4}dy$.

8.3.9. $\Delta z=22.75, dz=22.4$，相对误差$=1.5\%$.

8.3.10. 108.908.　　8.3.11. 1.0542.

8.3.12. $12\pi\ (\mathrm{cm})^3$.　　8.3.13. -0.167 m.

8.3.14. $ds=\sqrt{(dr)^2+r^2(d\theta)^2}$.

8.3.16. 不存在.

8.3.19. (1) $g(0,0)=0$；　(2) $g(0,0)=0$.

四（第 156 页）

8.4.1. $\dfrac{dz}{dt}=4t^3+2t^2+2t, \dfrac{d^2z}{dt^2}=12t^2+4t+2$.

8.4.2. $\dfrac{dz}{dt}=-e^t-e^{-t}, \dfrac{d^2z}{dt^2}=-e^t+e^{-t}$.

8.4.3. $\dfrac{dz}{dt}=\left(3-\dfrac{4}{t^3}-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\right)\sec^2\left(3t+\dfrac{2}{t^2}-\sqrt{t}\right)$.

8.4.4. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{2(u-2v)(u+3v)}{(v+2u)^2}, \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{(2v-u)(9u+2v)}{(v+2u)^2}$.

8.4.5. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{xy}{x^2-y^2}}\left[2x+y-\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}\right]$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\frac{xy}{x^2+y^2}}\left[2y+x-\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right]$.

8.4.6. $\frac{\partial u}{\partial x}=(x-y)^{x^2+y^2}\left[2x\ln(x-y)+\frac{x^2+y^2}{x-y}\right]$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=(x-y)^{x^2+y^2}\left[2y\ln(x-y)+\frac{x^2+y^2}{y-x}\right]$.

8.4.7. $\frac{\partial u}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xf_1'-\frac{x}{y^2}f_2'$.

8.4.8. $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'+\frac{1}{x}f_3'$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$.

8.4.9. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'+4y^2f''$.

8.4.10. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=2f_{11}''+(2x+y)f_{12}''+f_2'+xyf_{22}''$.

8.4.11. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f'(x+y)+yf''(xy)+yf''(x+y)$.

8.4.15. 1.

8.4.16. $\frac{\pi}{3}25\times10^3(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$.

8.4.20. $2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

8.4.21. $-\frac{1}{2}$.

8.4.22. $2v\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial w}{\partial v}=0$.

8.4.23. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}$.

8.4.24. $u_{xx}(x,2x)=-\frac{4}{3}x$, $u_{xy}(x,2x)=\frac{5}{3}x$,

$u_{yy}(x,2x)=-\frac{4}{3}x$.

8.4.25. $a=1$.

五（第159页）

8.5.1. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-xy}$.

8.5.2. $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2y-y^3}{3xy^2-x^3}$.

8.5.3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ye^{xy}-e^{y}-ye^{x}}{xe^{y}+e^{x}-xe^{xy}}$.

8.5.4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2(\ln x-1)}{x^2(\ln y-1)}$.   8.5.5. (1,1)或(−3,1).

8.5.6. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{ayz-x^2}{z^2-axy},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{axz-y^2}{z^2-axy},\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{axz-y^2}{x^2-ayz}$.

8.5.7. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z^2}{2y-3xz},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{z}{2y-3xz},\dfrac{\partial x}{\partial z}=\dfrac{1}{z}$.

8.5.8. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\tan(x+z)-1,\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\tan(x+z)$,

$\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{1}{1+\cot(x+z)}$.

8.5.13. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{4-4z+z^2+x^2}{(2-z)^3}$.

8.5.14. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{16xz}{(3z^2-2x)^3},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{6z}{(3z^2-2x)^3}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{6z^2+4x}{(3z^2-2x)^3}$.

8.5.15. $dz=-\dfrac{z}{x}dx+\dfrac{z(2xyz-1)}{y(2xz-2xyz+1)}dy$.

8.5.16. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $\quad\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2}$,

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{yu+xv}{x^2+y^2}$, $\quad\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$.

8.5.17. $du=\dfrac{1}{x\cos v+y\cos u}[(\sin v+x\cos v)dx-(\sin u-x\cos v)dy]$,

$dv=\dfrac{1}{x\cos v+y\cos u}[-(\sin v-y\cos u)dx+(\sin u+y\cos u)dy]$.

8.5.21. $du=\left(f_1'+\dfrac{1}{1-y\varphi'(z)}\right)dx+\dfrac{f_2'\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}dy$.

8.5.24. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1-2zy^2}{2u},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{4u^2y^4+(1-2y^2z)^2}{4u^3}$.

8.5.25. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{(y-x)(x+1)}{(y+z)^2(1+z)}e^{x-z}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x+z}{(y+z)^2}+\frac{(y-x)(y+1)}{(z+1)^2(y+z)^2}e^{y-x}.$$

8.5.26. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\omega}{\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$,

其中 $I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}$.

8.5.29. $\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\frac{v}{u}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{v}{u}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}-\sin\frac{v}{u}$,

$\frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}$.

六（第 162 页）

8.6.1. 切线方程：$x-\frac{1}{4}=y-\frac{1}{3}=z-\frac{1}{2}$.

8.6.2. 切线方程：$\frac{\sqrt{2}\,x-a}{-a}=\frac{\sqrt{2}\,y-a}{a}=\frac{4z-b\pi}{4b}$,

法平面方程：$2\sqrt{2}\,a(x-y)-b(4z-b\pi)=0$.

8.6.3. 切线方程：$\frac{4x-1}{4}=\frac{3y+1}{-3}=\frac{2z-1}{2}$.

8.6.4. 切线方程：$\begin{cases}\frac{x-a}{-\sqrt{2}}=\frac{z-\sqrt{2}\,a}{1},\\ y-a=0.\end{cases}$

法平面方程：$\sqrt{2}\,x-z=0$.

8.6.5. $6+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(2\sqrt{2}+3)$.

8.6.7. 切平面方程：$9x+y-z-27=0$,

法线方程：$\frac{x-3}{9}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

8.6.8. 提示：由曲面的所有切平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(-1,-f',1+f')$ 与定向量 $\boldsymbol{s}=(1,1,1)$ 垂直可证得结论.

8.6.9. 切平面方程：$2ax_0x+2by_0y-z-z_0=0$,

法线方程：$\frac{x-x_0}{2ax_0}=\frac{y-y_0}{2by_0}=\frac{z-z_0}{-1}$.

8.6.10. $x+4y+6z=21$ 或 $x+4y+6z=-21$.

8.6.13. $\alpha=\arccos\frac{8}{\sqrt{77}}$.　　8.6.14. $\lambda=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

8.6.17. 提示：交角 $\theta=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

8.6.18. 切平面方程：$3x-z=0$.

8.6.19. 提示：可证曲面上任一点处的法向量与定向量 $\tau=\left(\frac{b}{a},\frac{c}{b},-1\right)$ 垂直.

8.6.20. 切平面方程：$9x+y-z-20=0$ 或

$9x+17y-17z+27=0$.

8.6.21. 体积 $V=\frac{9}{2}a^3$.

七（第 164 页）

8.7.1. $\frac{\partial z}{\partial l}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　8.7.2. $\frac{\partial u}{\partial l}=1$.

8.7.3. $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{22}{\sqrt{14}}$.

8.7.4. $\mathbf{grad}\ z=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$, $\frac{\partial z}{\partial l}=2\sqrt{5}$.

8.7.5. $\mathbf{grad}\ z=\frac{1}{5}(-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$, $(\mathbf{grad}\ z)_{\overrightarrow{PM}}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

8.7.6. (1) $\theta=\frac{\pi}{4}$；(2) $\theta=\frac{5\pi}{4}$；(3) $\theta=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.

8.7.8. $\mathbf{grad}\ u=\frac{1}{\sqrt{10}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{27\sqrt{10}}\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{10}}{27}\boldsymbol{k}$, $\frac{\partial u}{\partial T}=-\frac{5\sqrt{10}}{99}$.

8.7.9. 在球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$ 上 $|\mathbf{grad}\ u|=1$.

8.7.10. $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2u}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，当 $a=b=c$ 时，$\frac{\partial u}{\partial r}=|\mathbf{grad}\ u|$.

八（第 166 页）

8.8.1. 无极值.　　　　8.8.2. 极大值 $f(a,a)=a^3$.

8.8.3. 极小值 $f(-1,1)=0$.

8.8.4. 极大值 $f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

8.8.5. 极大值 $z(1,-1)=6$，极小值 $z(1,-1)=-2$.

8.8.6. 极小值 $z\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

8.8.7. 极大值 $u\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=3$，

极小值 $u\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=3$.

8.8.9. 三边长均为$\frac{2}{3}p$.　　　8.8.10. 长、宽、高均为$\frac{d}{\sqrt{3}}$.

8.8.11. 一对内角互补.　　　8.8.14. $\frac{7}{4\sqrt{2}}$.

8.8.15. 最近点$\left(9,\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right)$，最远点$\left(-9,-\frac{1}{8},-\frac{3}{8}\right)$.

8.8.16. $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+z=1$.

8.8.17. $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$.

*九（第 167 页）

8.9.1. $e^x\cos y=1+x+\frac{1}{2!}(x^2-y^2)+R_2$，

其中 $R_2=\frac{1}{3!}e^{\theta x}[(x^3-3xy^2)\cos(\theta y)+(y^3-3x^2y)\sin(\theta y)]$.

$0<\theta<1$.

8.9.2. $$(1+x)^m(1+y)^n=1+mx+ny+\left[\frac{m(m-1)}{2!}x^2+mnxy+\frac{n(n-1)}{2!}y^2\right]+R_2.$$

8.9.3. $\arctan\frac{1+x+y}{1-x+y}=\frac{\pi}{4}+x-xy+R_2$.

8.9.4. $\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z$

$$=-xy-yz-zx+R_2.$$

8.9.5. $\ln(1+x+y)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x+y)^k}{k}+R_n,$

其中 $R_n=\frac{(-1)^n(x+y)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x+\theta y)^n}.$

8.9.6. $x^3+y^3+z^3-3xyz=3[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)]+(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1).$

8.9.7. $z=1+[2(x-1)-(y-1)]+[10(x-1)(y-1)-8(x-1)^2-3(y-1)^2]+R_2.$

*十（第 168 页）

8.10.1. $a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},$

$$b=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}.$$

8.10.2. $\tan\alpha=\frac{2(\overline{x}\,\overline{y}-\overline{xy})}{|\overline{x^2}-(\overline{x})^2|-|\overline{y^2}-(\overline{y})^2|},$

$$p=\overline{x}\cos\alpha+\overline{y}\sin\alpha.$$

其中 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,\ \overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\ \overline{y^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2.$$

十一（第 168 页）

8.11.2. $f_x'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-y}{2\sqrt{-xy}}, & xy<0,\\ 0, & xy=0,\\ \dfrac{y}{2\sqrt{xy}}, & xy>0;\end{cases}$

$f_y'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-x}{2\sqrt{-xy}}, & xy<0,\\ 0, & xy=0,\\ \dfrac{x}{2\sqrt{xy}}, & xy>0.\end{cases}$

8.11.4. 0.

8.11.5. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\dfrac{z}{x^2}f_1'}{\dfrac{1}{x}f_1'-\dfrac{y}{z^2}f_2'}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\dfrac{1}{z}f_2'}{\dfrac{y}{z^2}f_2'-\dfrac{1}{x}f_1'}$.

8.11.7. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{f'}{1-f'}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{f''}{(1-f')^3}$.

8.11.9. $a=\dfrac{1}{4}$, $b=-\dfrac{1}{4}$.

8.11.10. (1) $\dfrac{g_y}{f_y}$; (2) $\dfrac{-g_yf_x+g_xf_y}{f_y}$; (3) $\dfrac{f_y}{g_xf_y-g_yf_x}$.

8.11.12. $x+2z=7$ 或 $x+4y+6z=21$.

8.11.13. $\dfrac{11}{7}$.

8.11.15. $\arccos\left(-\dfrac{8}{9}\right)$.

8.11.16. $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$,

其中 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)为三角形的三个顶点.

8.11.18. $\dfrac{7}{\sqrt{186}}$.

8.11.19. $\begin{cases}3x^2+4z^2=4,\\ y=0.\end{cases}$

8.11.21. 0.

8.11.23. $\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_1'+f_3'\dfrac{y}{1+u^4}$,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=f_{11}''+\frac{2yf_{13}''}{1+u^4}+\frac{y^2 f_{33}''}{(1+u^4)^2}-\frac{4yu^3 f_3'}{(1+u^4)^3}.$$

8.11.24. $\frac{a^3 b}{3}\left(\frac{1}{3y^2}-\frac{1}{6}y^3\right)+C_1 y+C_2$ （其中 C_1，C_2 为任意常数）.

8.11.26. $6x+3y-5z=9$ 或 $x+y-z=2$.

8.11.28. 在点 $M\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2},2-\sqrt{3}\right)$ 处引力最大.

在点 $Q\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2},-\frac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3}\right)$ 处引力最小.

8.11.29. (1) $\left[\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}-3x_0^2 f(u)+x_0 y_0 f'(u)\right](x-x_0)$

$+\left[\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}-x_0 f'(u)\right](y-y_0)$

$+\left[1+\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\right](z-z_0)=0$； (2) -2.

8.11.30. 提示：证明曲线在顶点处的法线垂直于三角形的对边.

第 九 章

一（第 173 页）

9.1.1. $\frac{1}{2}\omega^2\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

9.1.2. 取 x 轴铅直朝下，y 轴与水面齐，则所受水压力为 $\iint\limits_D \gamma x\mathrm{d}\sigma$，其中 γ 为单位体积水的重量.

9.1.3. (1) $\frac{\pi}{3}a^3$； (2) $\frac{2}{3}\pi a^3$； (3) $\pi a^2\left(b-\frac{2}{3}a\right)$；

(4) $\frac{2}{3}\pi a^3$.

9.1.4. (1) $I_1 \leqslant I_2$; (2) $I_1 \geqslant I_2$; (3) $I_1 \leqslant I_2$; (4) $I_1 \geqslant I_2$.

9.1.5. $22\pi \leqslant I \leqslant 30\pi$.　　　　9.1.6. $4 \leqslant I \leqslant 6$.

9.1.7. $4(\sqrt{5}-2)\pi \leqslant I \leqslant 4(\sqrt{5}+2)\pi$.

9.1.8. $-8 \leqslant I \leqslant \frac{2}{3}$.　　　　9.1.10. 0.

9.1.11. 0.　　　　9.1.12. 0.

9.1.13. πa^2.　　　　9.1.14. π

二（第 175 页）

9.2.1. $-\frac{\pi}{16}$.　　　　9.2.2. $-\frac{2}{15}$.

9.2.3. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_2^4 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

9.2.4. $\int_{-2}^{1} \mathrm{d}x \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{x}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{2x}^{\frac{x}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \int_{-2}^{-1} \mathrm{d}y \int_{\frac{2}{y}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{2y}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

9.2.5. $\int_0^4 \mathrm{d}x \int_{3-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{3+\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \int_1^5 \mathrm{d}y \int_{2-\sqrt{4-(y-3)^2}}^{2+\sqrt{4-(y-3)^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

9.2.6. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

9.2.7. $\int_0^a \mathrm{d}y \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

9.2.8. $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

9.2.9. $\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_0^8 \mathrm{d}y \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

9.2.10. $\frac{9}{4}$.

9.2.11. $\frac{45}{8}$.

9.2.12. $\frac{\pi}{8}a^3$.

9.2.13. $-6\pi^2$.

9.2.14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

9.2.15. $\frac{1}{2}R^2\int_0^{\arctan R}f(\tan\theta)d\theta$.

9.2.16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sin 2\theta}f(r^2)rdr$.

9.2.17. (1) a^2+b^2; (2) $-\frac{2v}{u}$; (3) $\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$; (4) abr.

9.2.18. $2\sqrt{3}\pi$.

9.2.19. $\frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$.

9.2.20. $\pi ab\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

9.2.21. $\frac{1}{3}(1-\cos 1)$.

9.2.22. $\frac{1}{48}$.

9.2.23. $\frac{2}{3}$.

9.2.24. $\frac{\pi}{4}$.

9.2.25. $\frac{\pi}{2}(a+b)R^2$.

9.2.26. $\frac{\pi}{8}(\pi-2)$.

9.2.27. $\frac{\pi}{2}$.

9.2.28. $2-\frac{\pi}{2}$.

9.2.29. $\frac{7}{32}\pi^2$.

9.2.30. $\frac{\pi}{8}a^4$.

9.2.31. $\frac{2}{45}(\sqrt{2}+1)$.

9.2.32. $\frac{4}{15}a^4$.

9.2.33. $32-4\pi$.

9.2.34. $\frac{41}{2}\pi$.

9.2.35. $\frac{43}{66}$.

9.2.36. $\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}$.

9.2.37. $\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{2}$.

9.2.38. $\frac{\pi}{2}-1$.

9.2.39. 2.

9.2.40. $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$.

9.2.41. $\frac{4}{\pi^3}(\pi+2)$.

9.2.42. $\frac{2}{9}(8-5\sqrt{2})a^3$.　　9.2.43. $-\frac{1}{2}\ln 2$.

9.2.44. $-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{0}^{3}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{3}y^2}^{1+\sqrt{y+1}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

9.2.45. $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

9.2.46. $\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{\arccos y}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{\arccos y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.

9.2.47. $\int_{0}^{\sqrt{2}a}\mathrm{d}r\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2a}}F(r,\theta)\mathrm{d}\theta$.

9.2.48. $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.　　9.2.49. 6.

9.2.50. $\frac{1}{3p}[\sin(pb)-\sin(pa)]-\frac{1}{3q}[\sin(qb)-\sin(qa)]$.

9.2.53. $4tf(t)$.　　9.2.54. $f(0,0)$.

9.2.55. $\frac{1}{2}$.

9.2.57. 提示：利用不等式$[f(x)]^2+[f(y)]^2\geqslant 2f(x)f(y)$.

9.2.58. 提示：利用不等式$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\geqslant 2$.

三（第 181 页）

9.3.1. $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$.　　9.3.2. $\frac{1}{2}a^2\ln 2$.

9.3.3. $2a^2$.　　9.3.4. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)a^2$.

9.3.5. $\frac{5}{8}\pi a^2$.　　9.3.6. $\frac{\pi}{|\delta|}$.

9.3.7. $\frac{1}{6}$.　　9.3.8. $3\pi a^3$.

9.3.9. $2\pi r(R-r)$.　　9.3.10. $\left(\frac{3}{5},0\right)$.

9.3.11. $\left(-\frac{1}{2},\frac{8}{5}\right)$.　　9.3.12. $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi}\right)$.

9.3.13. $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$.　　9.3.14. $I_x=\frac{1}{44}$, $I_y=\frac{1}{36}$.

9.3.15. $\frac{3}{64}\pi a^4$.

9.3.16. $\frac{\pi}{2}a^2$.

9.3.17. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.

9.3.18. $\sqrt{6}\pi$.

9.3.19. $\frac{81}{10}$.

9.3.20. $\frac{5}{6}\pi a^3$.

9.3.21. $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4)$.

9.3.22. $\frac{81}{32}\pi$.

9.3.23. $\frac{4}{9}(8-5\sqrt{2})a^3$.

9.3.24. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{8}\right)$.

9.3.25. $\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{3\pi}\right)a,0\right)$.

9.3.26. $\left(\left(\frac{8}{3\pi}-\frac{1}{2}\right)a,\frac{2}{\pi}a\right)$.

9.3.27. $\left(\frac{15\pi-32}{6(5\pi-8)}a,0\right)$.

9.3.28. $\frac{35}{12}\pi a^4$.

9.3.29. $\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{2}-\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

9.3.30. $I(\theta)=\frac{4}{7}\sin^2\theta+\frac{4}{15}\cos^2\theta$,最小值为$I_x=\frac{4}{15}$,最大值为$I_y=\frac{4}{7}$.

9.3.31. $\frac{\pi}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1)a^2$.

9.3.32. $\frac{2\pi}{3}(8-3\sqrt{6}+2\sqrt{2})a^2$.

9.3.33. $\frac{a}{2}(8h+\pi\sqrt{a^2+h^2})$.

9.3.34. $\frac{1}{9}(20-3\pi)$.

9.3.35. $2\pi f\rho a\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$.

9.3.36. $\frac{9}{8}a^4$.

9.3.37. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi ab$.

9.3.38. $S(t)=\frac{\pi}{a}t^2(2a-t)$, $S_{\max}=S\left(\frac{4}{3}a\right)=\frac{32}{27}\pi a^2$.

9.3.39. $I(t)=t^2-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2+1)t+\frac{1}{9}(2\mathrm{e}^3+1)$, $t=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$时$I$最小.

9.3.40. $I(\alpha)=\dfrac{\pi}{4}ab(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)$,

$$I_{\max}=I_y=\frac{\pi}{4}a^3b,\ I_{\min}=I_x=\frac{\pi}{4}ab^3.$$

9.3.41. $F_x=0, F_y=2f\rho\left(\ln\dfrac{R+\sqrt{R^2+a^2}}{a}-\dfrac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)$,

$$F_z=f\rho\pi a\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\right).$$

四（第 185 页）

9.4.1. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}y\int_{3x^2+y^2}^{1-x^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$

9.4.2. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$

9.4.3. $3-\mathrm{e}$.

9.4.4. $\dfrac{1}{180}$.

9.4.5. 9π.

9.4.6. $\dfrac{2}{15}\pi ab^3c$.

9.4.7. $\dfrac{8}{3}\pi$.

9.4.8. $\dfrac{5}{2}\pi$.

9.4.9. $\dfrac{4}{15}\pi(b^5-a^5)$.

9.4.10. $\dfrac{\pi}{8}a^4$.

9.4.11. $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

9.4.12. $\dfrac{5}{6}\pi a^3$.

9.4.13. $\dfrac{\pi}{3}a^3$.

9.4.14. $\left(0,0,\dfrac{1}{4}\right)$.

9.4.15. $\left(0,0,\dfrac{5}{4}a\right)$.

9.4.16. $\dfrac{\rho}{30}$.

9.4.17. (1) $abcr^2\sin\varphi$; (2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

9.4.18. $\dfrac{1}{48}abc$.

9.4.19. $\dfrac{1}{16}\pi^2-\dfrac{1}{2}$.

9.4.20. $\frac{1}{36}$.

9.4.21. $\frac{1}{36}$.

9.4.22. 336π.

9.4.23. $3\pi(e^2-1)$.

9.4.24. 2π.

9.4.25. $\frac{59}{480}\pi R^5$.

9.4.26. $\frac{21}{16}\pi$.

9.4.27. $\frac{1}{6}(8\sqrt{2}-5)\pi$.

9.4.28. $\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)\pi$.

9.4.29. $\frac{8}{9}a^2$.

9.4.30. $\frac{1}{6}(7-4\sqrt{2})\pi$.

9.4.31. $\frac{2}{3}(2e-5)$.

9.4.32. $\frac{1}{6}(2\cos 1-1)$.

9.4.33. $\frac{1}{2}\int_0^1(1-z^2)f(z)dz$.

9.4.34. $F(t)=\frac{1}{2}\int_0^t(t-z)^2f(z)dz$, $F'''(t)=f(t)$.

9.4.35. $\pi h[f(0)+\frac{1}{3}h^2]$.

9.4.36. $\frac{2}{3}(10-3\sqrt{3})\pi$.

9.4.37. $\frac{53}{96}$.

9.4.38. $\frac{9}{8}a^3$.

9.4.39. $\frac{\pi}{3}abc^3$.

9.4.40. $27:37$.

9.4.41. $(3\pi-8):(9\pi+8)$.

9.4.42. 12 cm.

9.4.43. $\frac{\pi}{2}$.

9.4.44. $\frac{16}{15}$.

9.4.45. $\left(0,0,\frac{1}{4}\right)$.

9.4.46. $\left(0,0,\frac{1}{3}\right)$.

9.4.47. $\left(0,0,\frac{3}{8}(1+\cos\alpha)R\right)$.

9.4.48. $\left(\frac{4}{3},0,0\right)$.

9.4.49. $1:\sqrt{2}$.

9.4.50. $\frac{28}{15}\rho\pi R^5$.

9.4.51. $\frac{1}{30}\rho\pi h^3(20R^2-15Rh+3h^2)$.

9.4.52. $\frac{\pi}{8}$.

9.4.53. $2\pi f\rho h(1-\cos\alpha)$.

9.4.54. $\frac{1}{32}(b^8-a^8)\left(\beta^2-\alpha^2+4\ln\frac{\beta}{\alpha}-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$.

9.4.55. 提示：令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

9.4.56. $\frac{4}{3}f\rho\pi a$.

9.4.58. $a>R$ 时，$\bar{\rho}=a+\frac{R^2}{5a}$;

$a\leqslant R$ 时，$\bar{\rho}=\frac{1}{20R^3}(15R^4+10R^2a^2-a^4)$.

9.4.60. $I=\frac{1}{12}\rho\pi hR^2\left[6R^2+\frac{1}{1+k^2}(4h^2-3R^2)\right]$,

当 $\frac{h}{R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，I 与 k 无关.

9.4.61. $I=\frac{4}{15}\pi abc[(1-l^2)a^2+(1-m^2)b^2+(1-p^2)c^2]$,

$I_{\max}=I_z=\frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2)$,

$I_{\min}=I_x=\frac{4}{15}\pi abc(b^2+c^2)$.

9.4.62. $I=\frac{1}{12}[11-3(l+m+p)^2]a^5$,

当 $l=m=p$ 时，有 $I_{\min}=\frac{1}{6}a^5$;

当 $l+m+p=0$ 时，有 $I_{\max}=\frac{11}{12}a^5$.

*五（第 191 页）

9.5.1. $\frac{2}{x}\ln(1+x^2)$.

9.5.2. $\frac{2}{x^3}[\sin(x^2)-x^2\cos(x^2)]$.

9.5.3. $\frac{2x+b}{x(b+x)}\sin(bx+x^2)-\frac{2x+a}{x(a+x)}\sin(ax+x^2)$.

9.5.4. $y(2-3x^2)f(xy)+xy^2(1-x^2)f'(xy)+\frac{y}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)$.

9.5.5. $\frac{1}{x}(3e^{-x^3}-2e^{-x^2})$.　　9.5.6. $\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$.

9.5.7. $\arctan\frac{\beta}{\alpha}$.

9.5.8. $\frac{1}{6}\pi^2$. 提示：令 $F(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}dx$.

第　十　章

一（第 192 页）

10.1.1. $S_x=\int_L 2\pi y ds, S_y=\int_L 2\pi y ds$.

10.1.2. $\sqrt[3]{10}(\sin 1-\cos 1)$.　　10.1.3. $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$.

10.1.4. $a^{\frac{7}{3}}$.　　10.1.5. $1+\sqrt{2}$.

10.1.6. $\frac{1}{3p}[(p^2+y_0^2)^{3/2}-p^3]$.

10.1.7. $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{17}}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{2}+1}$.

10.1.8. 40.　　10.1.9. $\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi^3a$.

10.1.11. $2a^2$.

10.1.12. $\frac{1}{3}[(1+x_2^2)^{3/2}-(1+x_1^2)^{3/2}]$.

10.1.13. δa.

10.1.14. $\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}$.

10.1.15. $\sqrt{3}(t_2-t_1)$.　　10.1.16. $(-\frac{4}{5}a,0)$.

10.1.17. $\left(\frac{4}{3}a,\frac{4}{3}a\right)$.　　10.1.18. $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi}\right)$.

10.1.19. $\pi\left(\frac{3}{4}\sqrt{17}+\ln\frac{13+3\sqrt{17}}{4}\right)$.

10.1.20. $I_y=\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1),I_x=\frac{1}{210}(64\sqrt{2}-71)$.

10.1.21. $\frac{2f\rho}{R}$.

10.1.22. $\int_L [z_2(x,y)-z_1(x,y)]\mathrm{d}s$,

其中 L 为柱面的准线$\begin{cases}\varphi(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$

10.1.23. $8a^2$.

10.1.24. $4a^2$

10.1.25. $\frac{2\pi}{3}a^3$.

二（第 194 页）

10.2.1. $\int_L \varphi(x)\mathrm{d}s=\mathrm{sgn}(b-a)\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$,

$\int_L \varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$.

10.2.2. $\frac{25}{2}$.

10.2.3. 3.

10.2.4. 32.

10.2.5. (1) $\frac{1}{3}$; (2) $\frac{1}{12}$; (3) $\frac{17}{30}$; (4) $-\frac{1}{20}$.

10.2.6. (1) 0; (2) $\frac{2}{3}$; (3) 2.

10.2.7. -2π.

10.2.8. 0.

10.2.9. $-\pi a^2$.

10.2.10. $\frac{1}{35}$.

10.2.11. $\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

10.2.12. (1) -2π; (2) -2π.

10.2.13. 9.

10.2.14. $\frac{\pi}{4}-1$.

10.2.15. $1+\mathrm{e}\ln 2$.

10.2.16. 2.

10.2.17. $-2\pi a^2$.

10.2.18. (1) $\frac{k}{2}\pi a^2$; (2) $\frac{3k}{16}\pi a^2$.

10.2.19. $-\frac{8}{15}$.

10.2.20. (1) $\frac{1}{2}(a^2-b^2)$; (2) 0.

10.2.21. 3.

10.2.22. $-\frac{k}{|c|}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ln 2$.

10.2.23. $\frac{k}{2}\ln 2$.

10.2.24. $-2a^3$.

10.2.25. $\int_L \frac{x^2y-2x^2}{\sqrt{1+4x^2}}ds$.

10.2.26. $\int_\Gamma \frac{6xyz}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}ds$.

10.2.28. 2.

10.2.29. 0.

10.2.31. 0.

三（第199页）

10.3.1. $\frac{\pi}{2}a^4$.

10.3.2. $-2\pi ab$.

10.3.3. $\frac{1}{2}$.

10.3.4. 2π.

10.3.5. 62.

10.3.6. $-\frac{3}{2}$.

10.3.7. $1+\pi$.

10.3.8. $x^2\cos y+y^2\cos x$.

10.3.9. $e^{x+y}(x-y+1)+ye^x$.

10.3.10. $\frac{x-y}{(x+y)^2}$.

10.3.13. 0.

10.3.15. $6\pi a^2$

10.3.17. $-\frac{fmMc}{a(a-c)}$ $(c=\sqrt{a^2-b^2})$.

10.3.18. -1.

10.3.19. $\frac{1}{4}\pi^2$.

10.3.20. $a=b=2, I=2\cos 1$.

10.3.21. -8π.

10.3.22. -2.

10.3.23. $a=1$时I有最大值$\frac{3}{2}\pi$.

10.3.24. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-3y}{2\sqrt{2}x}$.

10.3.25. $\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+y^2}+y^2\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})-\frac{1}{2}y^2]$.

10.3.26. $\lambda=1, u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}+C$.

10.3.27. $a=b=-1, u(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$.

10.3.28. $\lambda=-1, u(x,y)=\frac{1}{y}\sqrt{x^2+y^2}+C$.

10.3.29. $-2\pi R^2$.　　　10.3.30. $-\frac{\pi}{8}ma^2$.

10.3.31. $(b_1-a_2)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\right)+2c_1$.

10.3.32. $\pm m\sigma+\varphi(y_2)e^{x_2}-\varphi(y_1)e^{x_1}-\frac{m}{2}(y_2+y_1)(x_2-x_1)-m(y_2-y_1)$，其中当$\overset{\frown}{AnBA}$为逆时针方向时取＋号，反向时取－号.

10.3.33. -1.　　　10.3.34. $\pi+2e^4-2$.

10.3.35. 2π.　　　10.3.36. π.

10.3.37. 当 C 不包围原点时 $W=0$，

当 C 包围原点时 $W=2\pi$.

10.3.38. 当 C 不包围原点时 $I=0$，当 C 包围原点时 $I=2\pi$.

10.3.39. $\frac{2}{3}$.　　　10.3.42. $-\frac{3}{2}\pi$.

10.3.43. $A_3=-3, A_4=0$.

四（第204页）

10.4.1. $M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$, $\bar{x}=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$,

$\bar{y}=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$, $\bar{z}=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$.

10.4.2. $(\sqrt{3}-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2\right)$.

10.4.3. πR^3.　　　10.4.4. $\frac{2}{15}\pi R^6$.

10.4.5. $\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$.　　　10.4.6. $\frac{32}{3}\pi(4-\sqrt{2})$.

10.4.7. 3π.

10.4.8. $\iint\limits_{\Sigma}[x^2+y^2+z^2-(lx+my+pz)^2]\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$.

10.4.9. $\pi R\ln\dfrac{R^2+H^2}{R^2}$.

10.4.10. $\dfrac{\pi}{6}(8-5\sqrt{2})a^4$.

10.4.11. $\dfrac{8}{15}\sqrt{2}a^4$.

10.4.12. π^2a^3.

10.4.13. $\dfrac{\rho\pi}{60}(25\sqrt{5}+1)$.

10.4.14. $\left(1,0,\dfrac{32}{9\pi}\right)$.

10.4.17. $\dfrac{\pi}{2}a^2$.

五（第206页）

10.5.1. $\dfrac{1}{12}$.

10.5.2. $\dfrac{3\pi}{8}$.

10.5.3. $-2\pi(\mathrm{e}^2-\mathrm{e})$.

10.5.4. $\dfrac{1}{9}(3\pi-4)a^3$.

10.5.5. 3.

10.5.6. $\left(\dfrac{\pi}{8}h+\dfrac{1}{3}R\right)R^2h$.

10.5.7. $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{2}{15}$.

10.5.8. (1) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{\sqrt{14}}(P-2Q+3R)\mathrm{d}S$;

(2) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{a}(xP+yQ+zR)\mathrm{d}S$;

(3) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{a}(xP+yQ)\mathrm{d}S$.

10.5.9. $4\pi a^3$.

10.5.10. $\dfrac{2}{15}\pi R^5$.

10.5.11. $-\dfrac{\pi}{3}$.

10.5.12. $-2\pi a^2$.

10.5.13. $-\dfrac{\pi}{2}h^4$.

10.5.14. $-\dfrac{1}{8}\pi^2a^4$.

10.5.15. $\dfrac{8}{3}$.

10.5.17. $\dfrac{\pi}{2}a^4$.

六（第209页）

10.6.1. $-\frac{9}{2}\pi$.

10.6.2. -12.

10.6.3. $-\frac{44}{15}\pi$.

10.6.4. $\frac{1}{8}$.

10.6.5. $\frac{2}{3}\pi$.

10.6.6. $-\pi\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$.

10.6.7. $\frac{\pi}{30}(8-5\sqrt{2})$.

10.6.8. $\frac{\pi}{8}$.

10.6.10. (1) $4x$；(2) $4(xy+yz+zx)$；(3) $\frac{2}{r}$；(4) $0(r\neq 0)$.

10.6.12. $\frac{\pi}{6}a^5$.

10.6.13. $\frac{2}{3}\pi$.

10.6.14. $3\pi abc$.

10.6.15. $(e^{2a}-1)\pi a^2$.

10.6.16. $\frac{\pi}{6}-\frac{8}{15}$.

10.6.17. $\frac{3}{2}\pi$.

10.6.18. 34π.

10.6.19. $-2\pi(e^2-e)$.

10.6.20. -2π.

10.6.21. 4π.

10.6.22. 2π.

10.6.23. $4\pi abc$.

七（第212页）

10.7.1. (1) $(2xy-x^2, 2yz-y^2, 2zx-x^2)$；(2) $(-xz, yz, 0)$；(3) $(2,4,6)$；(4) (y,z,x).

10.7.2. 7.

10.7.3. 2.

10.7.4. $\frac{1}{r}$.

10.7.5. -4π.

10.7.6. $-2a^3$.

10.7.7. $2(\cos\alpha-\sin\alpha)\pi a^2$.

10.7.8. $2\sqrt{2}\pi$.

10.7.9. $\frac{\pi}{4}a^3$.

10.7.10. πa^3.

10.7.11. 2σ.

10.7.12. (1) 0；　(2) 2π.

10.7.13. $\frac{1}{2}\ln[(x+y)^2+z^2]-\arctan\frac{x+y}{z}+C$.

10.7.14. $\dfrac{fm}{r}+C$.　　10.7.15. $f\sum_{i=1}^{n}\dfrac{m_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}+C$.

10.7.18. $f''(r)+\dfrac{2}{r}f'(r)$.

第十一章

一（第216页）

11.1.1. (1) $u_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$；　(2) $u_n=\dfrac{n-2}{n+1}$；

(3) $u_n=\dfrac{n}{n^2+1}$；　(4) $u_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{1\cdot4\cdot7\cdot\cdots(3n-2)}$；

(5) $u_n=\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}$.

11.1.2. (1) 收敛；　(2) 收敛.

11.1.3. (1) 发散；　(2) 发散；　(3) 收敛；　(4) 发散；
　(5) 收敛；　(6) 发散.

11.1.4. (1) 收敛；　(2) 收敛；　(3) 收敛；　(4) 收敛.

11.1.5. (1) 收敛；　(2) 收敛.

11.1.6. $a_n=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ $(n\in\mathrm{N})$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{6}.$$

11.1.7. (1) 提示：利用柯西审敛原理及所给条件.

11.1.8. (1) 1；　(2) $\dfrac{3}{4}$.

二（第218页）

11.2.1. (1) 收敛；　(2) 收敛；　(3) 发散；　(4) 收敛；
　(5) 收敛.

11.2.2. (1) 收敛；　(2) 收敛；　(3) 发散；　(4) 收敛.

11.2.3. (1) 收敛；　(2) 收敛；　(3) 发散；　(4) 收敛.

11.2.4. (1) 发散； (2) 收敛； (3) 收敛； (4) 发散；
(5) 收敛； (6) 发散； (7)发散.

11.2.5. (1) 绝对收敛； (2) 条件收敛； (3) 绝对收敛；
(4) 绝对收敛；(5) 绝对收敛.

11.2.7. (1) 发散； (2) 收敛；
(3) 收敛，提示：$(\ln n)^{\ln n}=n^{\ln\ln n}$；(4) 收敛；
(5) 当$0<a<1$或$a>1$时，收敛；当$a=1$时，发散.

11.2.8. 当$0<a<1$或$a=1$且$s>1$时，收敛；当$a>1$或$a=1$且$0<s\leqslant 1$时，发散.

11.2.9. 提示：当n适当大时，有$u_n^2<u_n$；不能成立. 研究例子$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

11.2.10. 提示：$\sqrt{u_nv_n}\leqslant\frac{1}{2}(u_n+v_n)$，$\frac{1}{n}\sqrt{u_n}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+u_n\right)$，$(n\in\mathbb{N})$；$u_nv_n\leqslant u_n$（当$n$适当大时）；$(u_n+v_n)^2\leqslant 2(u_n^2+v_n^2)$ $(n\in\mathbb{N})$.

11.2.11. 提示：利用比较审敛法的极限形式.

11.2.12. 不能断定. 研究例子$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right].$$

11.2.13. 提示：(1)不妨设所给不等式对一切n都成立. 证明$v_n\leqslant\frac{v_1}{u_1}u_n(n\in\mathbb{N})$；(2)用反证法并利用(1)的结论.

11.2.15. (1)错误、例如取$u_n=\frac{1}{n}$，$v_n=-\frac{1}{n}(n\in\mathbb{N})$；

(2) 错误. 例如取$u_n=v_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}(n\in\mathbb{N})$；

(3) 正确. 否则可推得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都绝对收敛，与已知条件矛盾；

(4) 错误. 例如取 $u_n=v_n=\frac{1}{n}(n\in\mathbb{N})$.

11.2.16. (1) 条件收敛；(2) 当 $p\leqslant 0$时，发散；当$0<p\leqslant 1$时，条件收敛；当 $p>1$时，绝对收敛；

(3) 条件收敛；提示：$\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)\sim(-1)^n\frac{1}{\ln n}\ (n\to\infty)$；

(4) 条件收敛；(5) 条件收敛；(6) 绝对收敛.

11.2.17. (1) 不定； (2) 发散.

11.2.18. 提示：(1) $0\leqslant v_n\leqslant|u_n|, 0\leqslant w_n\leqslant|u_n|(n\in\mathbb{N})$；

(2) $|u_n|=2v_n-u_n, |u_n|=2w_n+u_n(n\in\mathbb{N})$.

11.2.19. 提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=e^{-\lambda}$.

11.2.20. 提示：由 $f(k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(k), x\in[k,k+1]$, $(k\in\mathbb{N})$.

推得
$$\sum_{k=1}^{n}u_{k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}u_k,$$

即
$$\sum_{k=1}^{n+1}u_k-u_1\leqslant\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}u_k.$$

11.2.21. (1) 当 $p>1$时收敛，$0<p\leqslant 1$时发散；

(2) 发散； (3) 收敛； (4) 收敛.

11.2.22. 提示：利用莱布尼茨(Leibniz)判别法.

11.2.23. 提示：(1) 利用 n 充分大时，有$\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}>1+\alpha\ (\alpha>0)$，即 $u_n<\frac{1}{n^{1+\alpha}}$；

(2) 利用 n 充分大时，有$\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}<1$，即 $u_n>\frac{1}{n}$.

11.2.24. 当 $p>\frac{3}{2}$时，收敛；当 $p\leqslant\frac{3}{2}$时，发散. 提示：利用 $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\sim\frac{1}{\sqrt{n}}(n\to\infty)$.

11.2.25. 收敛.

11.2.26. 当$0<p\leqslant\frac{1}{2}$时,发散;当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时,条件收敛;当$p>1$时,绝对收敛.

三(第223页)

11.3.1. $R=+\infty,(-\infty,+\infty)$.

11.3.2. $R=+\infty,(-\infty,+\infty)$.

11.3.3. $R=1,(-1,1)$.

11.3.4. $R=1,(-2,0]$.

11.3.5. $R=1,(0,2]$.

11.3.6. $R=3,(0,6)$.

11.3.7. $R=2,[-2,4)$.

11.3.8. $R=1,[-1,1)$.

11.3.9. $\frac{1}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$.

11.3.10. $\frac{1}{(1-x)^3},x\in(-1,1)$.

11.3.11. $\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3$.

11.3.12. $\arctan x,x\in(-1,1)$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

11.3.13. $(-e,e)$.

11.3.14. $\left(-\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

11.3.15. $[-1,1)$.

11.3.16. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

11.3.17. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

11.3.18. $(0,+\infty)$.

11.3.19. $[0,+\infty)$.

11.3.20. 提示:考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

11.3.21. 4. 提示:原式$=2^m$, $m=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

11.3.22. $s(x)=\frac{x-1}{(2-x)^2}$, $x\in(0,2)$.

11.3.23. $s(x)=\begin{cases}1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x), & 0<|x|<1,\\ 0 & , \quad x=0.\end{cases}$

11.3.24. $s(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}, x\in(-\infty,+\infty)$.

11.3.25. $s(x)=\begin{cases}(x+1)\ln(x+1)-x, x\in(-1,1],\\ 1, \quad x=-1.\end{cases}$

11.3.26. $s(x)=\dfrac{3x-x^2}{(1-x)^3}, x\in(-1,1)$.

四（第225页）

11.4.1. $\dfrac{2x}{4-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n+1}, x\in(-2,2)$.

11.4.2. $\operatorname{ch} x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, x\in(-\infty,+\infty)$.

11.4.3. $\cos^2 x=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2x)^{2n}}{2(2n)!}, x\in(-\infty,+\infty)$.

11.4.4. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\right.$
$\left.\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right], x\in(-\infty,+\infty)$.

11.4.5. $\ln(1+x-2x^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n$,
$x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

11.4.6. $\dfrac{x}{1+x-2x^2}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n, x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

11.4.7. $\int_0^x e^{-t^2}dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$,
$x\in(-\infty,+\infty)$.

11.4.8. $\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)}$,
$x\in(-\infty,+\infty)$.

11.4.9. $\frac{1}{x(1+x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n$,

$x\in(0,2)$.

11.4.10. $\ln\frac{x}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}-\ln 2$,

$x\in(0,2)$.

11.4.11. $\sqrt[3]{8-x^3}=2\left[1-\frac{x^3}{24}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot\cdots\cdot(3n-4)}{3^n n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}\right]$,

$x\in[-2,2]$.

11.4.12. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}$,

$x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

11.4.13. $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=x^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2}$, $x\in(-1,1)$.

11.4.14. $\ln(1-x+x^2-x^3+x^4)=\ln\frac{1+x^5}{1+x}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x^{5n}-x^n),x\in(-1,1].$$

11.4.15. $x\arcsin x=x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+2}$,

$x\in(-1,1)$.

11.4.16. $\frac{f(x)}{1-x}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n, x\in(-1,1).$$

11.4.17. $s(x)=\sin x+x\cos x$.

11.4.18. $s(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$, $x\in(-1,1)$.

11.4.19. $\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{18}$.

11.4.20. $\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$.

11.4.21. $2(1-\ln 2)$.

11.4.22. $2e$.

11.4.23. $e^x\sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \cdots + \frac{(-4)^n x^{4n+1}}{(4n+1)!} + \frac{2(-4)^n x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{2(-4)^n x^{4n+3}}{(4n+3)!} + 0 \cdot x^{4n+4} + \cdots,$

$x \in (-\infty, +\infty)$.

提示：利用 $e^x\sin x = \operatorname{Im} e^{(1+i)x}$.

11.4.24. $\arctan \frac{2x}{1-x^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},$

$x \in (-1,1)$.

11.4.25. $(\arctan x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) x^{2n}, x \in [-1,1].$

提示：$(\arctan x)^2 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right]^2$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{1(2n-1)} + \frac{1}{3(2n-3)} + \frac{1}{5(2n-5)} + \cdots + \frac{1}{(2n-3)\cdot 3} + \frac{1}{(2n-1)\cdot 1}\right] x^{2n}, x \in [-1,1].$$

11.4.26. $(\arcsin x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{n} x^{2n}, x \in [-1,1].$

提示：设 $y = (\arcsin x)^2$，则 y 满足方程

$$(1-x^2)y'' - xy' - 2 = 0.$$

令 $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，代入方程求出 a_n.

11.4.27. $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) =$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, x \in [-1,1].$$

11.4.28. 提示：设

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} [x(1-x)^2]^n = \frac{x(1-x)^2}{1-x(1-x)^2},$$

$x \in (0,1)$. $\max_{0<x<1} s(x) = s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{23}$.

五（第 228 页）

11.5.1. 7.389.

11.5.2. 0.0971.

11.5.3. 0.2487.

11.5.4. 3.017.

11.5.5. 0.9806.

11.5.6. 0.0175.

11.5.7. 0.9848.

11.5.8. 0.0057.

11.5.9. 2.0000.

11.5.10. 3.518.

11.5.11. 提示：$x^{-x}=e^{-x\ln x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x\ln x)^n}{n!}$，$x\in(0,+\infty)$.

六（第 229 页）

11.6.1. 不一致收敛.

11.6.2. 不一致收敛.

11.6.3. 一致收敛.

11.6.4. 不一致收敛.

11.6.5. 不一致收敛.

11.6.6. 不一致收敛.

11.6.7. 一致收敛.

11.6.8. 一致收敛.

11.6.9. 不一致收敛.

11.6.10. 一致收敛.

11.6.12. 一致收敛. 提示：利用魏尔斯特拉斯判别法.

11.6.13. 一致收敛. 提示：估计余项.

11.6.14. 一致收敛. 提示：利用 $\ln(1+h)\leqslant h\quad(h>0)$.

11.6.15. 一致收敛. 提示：估计余项.

11.6.16. 提示：和函数在 $x=0$ 处不连续.

11.6.17. 提示：和函数在 $x=1$ 处不连续.

11.6.18. 提示：证明"若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 在 $(0,2\pi)$ 上一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛"，

11.6.19. 提示：对 $\forall x_0>1$，取 $p\in(1,x_0)$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 及

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)'$ 在$[p,+\infty)$上一致收敛.

七（第 231 页）

11.7.2. $I=0$.

11.7.3. $\alpha_n=a_n(n=0,1,2,\cdots),\beta_n=-b_n(n=1,2,\cdots)$.

11.7.4. $\alpha_n=-a_n(n=0,1,2,\cdots),\beta_n=b_n(n=1,2,\cdots)$.

11.7.5. $2x^2=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,x\in[-\pi,\pi]$.

11.7.6. $x^3=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^3}(6-n^2\pi^2)\sin nx,x\in(-\pi,\pi)$.

11.7.7. $\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx,x\in[-\pi,\pi]$.

11.7.8. $$e^{-x}+x=\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{2\operatorname{sh}\pi}{n^2+1}\cos nx+\left[\frac{2n\operatorname{sh}\pi}{n^2+1}-\frac{2\pi}{n}\right]\sin nx\right\},x\in(-\pi,\pi).$$

11.7.9. $$f(x)=\frac{\pi^2-\pi+1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{6}{n^2}\cos nx+\frac{1}{n\pi}\left[\pi+1-\frac{6}{n^2}+(-1)^n\left(\frac{6}{n^2}-3\pi^2-\pi-1\right)\right]\sin nx\right\},$$
$x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$.

11.7.10. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{2}\right]\sin nx$,
$x\in(-\pi,\pi)$.

11.7.11. $f(x)=\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[1+2\cos\frac{n\pi}{2}-3(-1)^n\right]$ $\sin nx,x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

11.7.12. $\sin^4x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$,
$x\in(-\infty,+\infty)$.

11.7.13. $\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

11.7.14. $\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx-n\sin nx)\right\}$

$$=\begin{cases}e^x, & |x|<\pi,\\ \operatorname{ch}\pi, & |x|=\pi.\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{\pi\coth\pi-1}{2}.$$

11.7.15. $|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$,

$x\in[-\pi,\pi]$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$.

11.7.16. $\alpha_k=a_k$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$, $\beta_k=b_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$，其中 $\{a_k\}$、$\{b_k\}$ 为 $f(x)$ 的傅里叶系数.

11.7.18. 延拓后的函数为

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ f(\pi-x), & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\\ -f(-x), & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right),\\ -f(\pi+x), & x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

11.7.19. 延拓后的函数为

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ -f(\pi-x), & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\\ f(-x), & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right),\\ -f(\pi+x), & x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

八（第 233 页）

11.8.1. $\operatorname{sgn} x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, $x\in[-\pi,\pi]$.

11.8.2. $\cos ax=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a}{n^2-a^2}\cos nx\right]$,

$x\in[-\pi,\pi]$.

11.8.3. $-\sin\frac{x}{2}+1=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n 8n}{4n^2-1}-\frac{2}{n}[(-1)^n-1]\right\}\cdot$

$\sin nx, x\in(0,\pi]$.

11.8.4. $f(x)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x, x\in[0,\pi]$.

11.8.5. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos nh)}{n}\sin nx$,

$x\in(0,h)\cup(h,\pi]$.

11.8.6. $\sin\frac{x}{2}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{1-4n^2}\sin nx$, $x\in[0,\pi)$.

11.8.7. $2x+3=\pi+3-\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$,

$x\in[0,\pi]$.

11.8.8. $e^{2x}=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}[(-1)^n e^{2\pi}-1]\cos nx$,

$x\in[0,\pi]$.

11.8.9. $f(x)=\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx, x\in[0,h)\cup(h,\pi]$.

11.8.10. $f(x)=1+\frac{3}{8}\pi+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right]-\right.$

$\left.\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}\cos nx, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

11.8.11. $f(x)=-\frac{5}{2}+\frac{7}{12}\pi^2+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[(-1)^n\frac{4\pi}{n}-\right.$

$\frac{2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\left(\frac{4}{n^2}-\frac{\pi^2}{2}-5\right)\sin\frac{n\pi}{2}\Big]\cos nx, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right].$

11.8.12. $\operatorname{sgn}(\cos x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x,$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

11.8.13. $\arcsin(\sin x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x,$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

九（第 234 页）

11.9.1. $x^2-x=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x+\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\right],$

$$x\in(-2,2).$$

11.9.2. $\cos\frac{\pi}{l}x=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi}{l}x,$

$$x\in\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right].$$

11.9.3. $f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}\cdot 3}{n\pi}\sin n\pi x,$

$$x\in(-1,0)\cup(0,1).$$

11.9.4. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(-1)^{n-1}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}+\frac{2}{(2n-1)\pi}\right]\right.$

$\left.\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi}{l}x-\frac{1}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{l}x\right\}, x\in[0,l).$

11.9.5. $f(x)=\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[1+2\cos\frac{n\pi}{3}\right]\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}x,$

$x\in[0,3].$

11.9.6. $f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos n\pi x$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{(2n-1)\pi}\cos(2n-1)\pi x,$$

$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$.

11.9.7. $f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{l}x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi}{l}x,$

$x\in[0,l]$.

*十（第 235 页）

11.10.1. $e^{2x}=\frac{2\text{sh }2\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(1+\frac{n}{2}i\right)}{n^2+4}e^{inx}, x\in(-\pi,\pi)$.

11.10.2. $\text{ch }x=\frac{\text{sh }\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}e^{inx}$, $x\in$ $(-\pi, \pi)$.

第 十 二 章

一（第 236 页）

12.1.1. (1) 三阶、线性；　(2) 一阶、非线性；　(3) 二阶、非线性；　(4) 一阶、非线性；　(5) 三阶、非线性；(6) 七阶、非线性.

12.1.2. 是. 12.1.3. 不是. 12.1.4. 是.

12.1.8. $y^2(y'^2+1)=4$.

12.1.9. $x+(y-\sqrt{x^2+y^2})y'=0$.

12.1.10. $y=xy'-\frac{x^2}{2}y''$.　　12.1.11. $y-\sqrt{1-x^2y'}=0$.

12.1.12. $2y^2-x^2=18$.　　12.1.13. $y=\sin x-2\cos x$.

12.1.14. $y=\frac{1}{6}(-5e^{-x}+9e^{x}-4e^{2x})$.

12.1.15. $y'''=0$.　　12.1.16. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{xy}$.

12.1.17. $y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$.

二（第 237 页）

12.2.1. $1+y^2=C(1-x^2)$.

12.2.2. $\sin y=\ln|1+x|-x+C$.

12.2.3. $y=\tan\left(\frac{1}{2}x^2+x+C\right)$.

12.2.4. $(1+x)e^y=2x+C$.

12.2.5. $1+y^2=C(1+x^2)$.

12.2.6. $y^2-1=2\ln(e^x+1)-2\ln(e+1)$.

12.2.7. $y=\frac{1}{2}(\arctan x)^2$.

12.2.8. $2(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)+5=0$.

12.2.9. $y=\csc x$.　　12.2.10. $e^{-y}-1=Ce^x$.

12.2.11. $x^2+y^2=1$.

12.2.12. $y=\pm\left[2\ln\left(\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right)-\sqrt{4-x^2}\right]$.

12.2.13. $x=y^n$.　　12.2.14. $r=\dfrac{2k}{1-\frac{1}{\theta_0}\left(1-\frac{2k}{r_0}\right)\theta}$.

12.2.15. $\frac{19}{24}-\ln 2$.　　12.2.16. $f(x)=\sqrt{\frac{x^4}{2}+x^2+\frac{1}{2}}$.

12.2.17. $\varphi(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

12.2.18. $y=4e^{\frac{\pi x}{6}}$ 或 $y=-4e^{\frac{\pi x}{6}}$.

12.2.19. $r=1$ 或 $r=\sec(\theta+C)$

三（第 239 页）

12.3.1. $\tan\frac{y}{2x}=Cx$.　　12.3.2. $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{-\arctan\frac{y}{x}}$.

12.3.3. $y=xe^{Cx}$.　　12.3.4. $x-\sqrt{xy}=C$.

12.3.5. $\ln(Cx)=-e^{-\frac{y}{x}}$.　　12.3.6. $\sin\frac{y}{x}=\ln(Cx)$.

12.3.7. $y=x\sqrt{2[\ln(-x)+2]}$.

12.3.8. $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$.

12.3.9. $\arctan\frac{y}{x}+\ln(x^2+y^2)=\frac{\pi}{4}+\ln 2$.

12.3.10. $y=x\arcsin\frac{1}{x}$.

12.3.11. $y-x-3=C(x+y-1)^3$.

12.3.12. $\ln[(y+3)^2+(x+2)^2]+2\arctan\left(\frac{y+3}{x+2}\right)=C$.

12.3.13. $x+y=\tan(y+C)$.

12.3.14. $4x+8\sin y+9\ln|4x-8\sin y+3|=C$.

12.3.15. $\cot\left(\frac{x+y}{2}\right)=Cx$.

12.3.16. $\sin\frac{y^2}{x}=Cx$.

12.3.17. $y^2=x\ln(Cy^2)$.

12.3.18. $x^2-y^4=Cy^6$.

12.3.19. $x^2+y^2-3=C(x^2-y^2-1)^5(x^2-4)^2$.

四（第241页）

12.4.1. $y=(\tan x-1)+Ce^{-\tan x}$.

12.4.2. $y=C\cos x+\sin x$.

12.4.3. $y=\frac{1}{x^2+1}\left(\frac{4}{3}x^3+C\right)$.

12.4.4. $y=ax+\frac{C}{\ln x}$.

12.4.5. $y=(C+e^x)e^{-\frac{1}{x}}$.

12.4.6. $y=(x+C)(1+x^2)$.

12.4.7. $y=\frac{1}{x}(e^x-e^a+ba)$.

12.4.8. $y=x+\sqrt{1-x^2}$.

12.4.9. $y=x^2(1-e^{\frac{1}{x}-1})$.

12.4.10. $y=\frac{1}{x^2}(\sin x-x\cos x)$.

12.4.11. $y^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}(1-x^2)+C(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$.

12.4.12. $y^2=x^2(C-6\sin x)$.

12.4.13. $y^3=ax+Cx(1-x^2)$.

12.4.14. $\frac{1}{y^2}=Ce^{x^2}+x^2+1$.

12.4.15. $x=Ce^{2y}+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y+4$.

12.4.16. $x=y^2+Cy^2+e^{-\frac{1}{y}}$.

12.4.17. $x(Ce^{-\frac{y^2}{2}}-y^2+2)=1$.

12.4.18. $x=3e^{\sin y}-2(1+\sin y)$.

12.4.19. $y=\arcsin\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}e^{-x}+x-1\right)$.

12.4.20. $(2x+1)e^y=4x+1$.

12.4.21. $f(x)=\frac{1}{2}(e^{2x}+1)$.

12.4.22. $y=\frac{x}{e}+x\ln\ln x$.

12.4.23. $(x+C)\cos y=\ln x$.

12.4.24. $\frac{1}{y-x^2}=e^{\frac{x^4}{4}}\left[\int xe^{-\frac{x^4}{4}}dx+C\right]$.

12.4.25. 当 $a=0$ 时，$y=x+\ln|x|+C$；

当 $a=1$ 时，$y=Cx+x\ln|x|+1$；

当 $a\neq0$ 和 1 时，$y=Cx^a+\frac{x}{1-a}-\frac{1}{a}$.

12.4.26. $v=\frac{g}{m-k}M_0^{\frac{m-k}{m}}(M_0-mt)^{\frac{k}{m}}-\frac{g}{m-k}(M_0-mt)$，

其中 k 为比例系数，g 为重力加速度.

12.4.27. $\alpha(x)=-x^2-1$；$\beta(x)=x^3$；

$$u(x,y)=x^3y-\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^2}{2}+C.$$

12.4.28. $f(x)=\frac{x}{x^3+1}\quad(x\geqslant1)$.

五（第 243 页）

12.5.1. $\sin(x+y^2)+3xy=C$.

12.5.2. $2(x+y)+\sin 2y+\sin 2x-4\sin\alpha\sin x\sin y=C$.

12.5.3. $\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=C.$

12.5.4. $\frac{x^2+y^2}{2}+\arctan\frac{y}{x}=C.$

12.5.5. $x^2+y^2=C.$ 12.5.6. $y=x\cot(x+C).$

12.5.7. $\frac{1}{m+1}x^{m+1}+x^2y^2+\frac{y^{n+1}}{n+1}+\ln|xy|=C.$

12.5.8. $\frac{x^2}{2}+\arcsin\frac{x}{y}+y=C.$ 12.5.9. $\frac{x}{y}-\frac{y^2}{2}=C.$

12.5.10. $x^2e^x+my^2=Cx^2.$ 12.5.11. $x^2+\frac{e^x}{y}=C.$

12.5.12. $\ln|y+1|-\frac{1}{xy}=C.$ 12.5.13. $x^2-y^2=Cy^3.$

12.5.14. $y=Ce^x+1+e^{2x}.$

12.5.15. $e^x(x-1)\sin y+e^xy\cos y=C.$

12.5.16. $2Cy=C^2x^2-1\ (C>0).$

12.5.17. $x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{7}{2}}-x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}=120.$

*六（第 244 页）

12.6.1.

x	y
0.0	0.500
0.1	0.550
0.2	0.605
0.3	0.666
0.4	0.733
0.5	0.806

12.6.2.

x	y
0.0	1.000
−0.1	0.900
−0.2	0.820
−0.3	0.758
−0.4	0.712
−0.5	0.681

12.6.3.

x	y
0.00	1.000
0.02	1.020
0.04	1.042
0.06	1.060
0.08	1.092
0.10	1.121

七（第 245 页）

12.7.1. $y=\frac{1}{2}(x^2-1)\arctan x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+C_1x+C_2.$

12.7.2. $y=\sin(x+C_1)+C_2.$

12.7.3. $y=1-\frac{1}{C_1x+C_2}$.

12.7.4. $(y-C_3)^2=C_1x+C_2$.

12.7.5. $\sqrt{2}C_1e^{-\frac{y}{2}}=\pm\text{sh}\ (C_1x+C_2)$,

或 $\sqrt{2}C_1e^{-\frac{y}{2}}=\sin\ (C_1x+C_2)$.

12.7.6. $y=2\arctan e^x$.　　12.7.7. $y=\frac{1}{1-x}$.

12.7.8. $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

12.7.9. $s\ (t)\ =v_0t+\frac{1}{2}\ (\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\ gt^2$　$(0\leqslant t\leqslant T$, T 为物体滑到斜坡底部的时间).

12.7.10. $\ln y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

12.7.11. $e^y=x^2+C_1x+C_2$.

12.7.12. $12\ (C_1y-x)\ =C_1^2\ (x+C_2)^3+C_3$.

12.7.13. $y^2=C_1x^2+C_2$.

12.7.15. $x=\frac{1}{2}\ (\sin y+C_1)^{2/3}+C_2$.

12.7.16. $(3agx+a^3)^2=\ (a^2-2gy)^3$，其中 g 为重力加速度.

八（第 246 页）

12.8.1. (1) 是；　(2) 否；　(3) 否；　(4) 否；

(5) 否；　(6) 是；　(7) 否；　(8) 否.

12.8.3. 否；$W\ [y_1,\ y_2]\ \equiv 0$.

12.8.5. $y=\ (C_1+C_2x)\ e^x$.

12.8.6. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\ln\ (\sec x+\tan x)$.

12.8.8. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$.

12.8.9. $y=C_1e^x+C_2e^x\ln|x|$.

12.8.10. $y=C_1x+C_2x^2e^x+x^2+x$.

12.8.11. $y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{1}{9}x^2\ln x$.

九（第 248 页）

12.9.1. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$.

12.9.2. $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$.

12.9.3. $y=C_1e^{-x}\ (C_2+C_3x+C_4x^2)\ e^{2x}$.

12.9.4. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+C_3e^{5x}$.

12.9.5. $y=C_1+\ (C_2+C_3x)\ \cos x+\ (C_4+C_5x)\ \sin x$.

12.9.6. $y=\ (C_1+C_2x)\ e^{x}+C_3\cos x+C_4\sin x$.

12.9.7. $y=e^{-x}\ (\cos 3x+\sin 3x)$.

12.9.8. $y=3+e^{-x}$.

12.9.9. $x=\dfrac{2}{\sqrt{13}}e^{-\frac{1}{2}t}\mathrm{sh}\left(\dfrac{\sqrt{13}}{2}t\right)$.

12.9.10. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\left(\dfrac{1}{10}x-\dfrac{13}{50}\right)e^{3x}$.

12.9.11. $y=C_1e^{x}+C_2e^{6x}+\dfrac{5}{74}\sin x+\dfrac{7}{75}\cos x$.

12.9.12. $y=-\dfrac{5}{7}+2x+e^{-x}+C_1e^{-2x}+\ (C_2+x)\ e^{-5x}$.

12.9.13. $y=-69+54x-18x^2+4x^3+$

$(C_1+C_2x)\ e^{-x}+C_3e^{2x}$.

12.9.14. $y=C_1+C_2x+C_3e^{x}+C_4xe^{x}+x^2+\dfrac{1}{6}x^3$.

12.9.15. $y=\ (x-\sin x)\ e^{-x}$.

12.9.16. $y=\dfrac{1}{24}\cos 3x+\dfrac{1}{8}\cos x$.

12.9.17. $y=4-3e^{-x}+e^{-2x}$.

12.9.18. $y=\cos 3x-\dfrac{1}{3}\sin 3x$.

12.9.19. $x=\dfrac{1}{5}\ (4e^{t}+e^{-4t})$.

12.9.20. $x=\dfrac{mg}{k}t-\dfrac{m^2g}{k}\ (1-e^{-\frac{k}{m}t})$，$g$ 为重力加速度，k 为比例系数.

12.9.21. (1) $s(t)=\cos 2t-\cos 3t$;

(2) $s(t)=\cos 2t-\cos 3t+2\sin 2t$.

12.9.22. $y=C_1x^2+C_2x^3+\frac{1}{2}x$.

12.9.23. $w=C_1+C_2\ln r-\frac{a^2}{4}r^2$.

12.9.24. $\begin{cases}x=C_1e^t+C_2e^{-t}+\frac{t}{2}(e^t-e^{-t}),\\ y=C_1e^t-C_2e^{-t}+\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})+\frac{1}{2}t(e^t+e^{-t}).\end{cases}$

12.9.25.

$$\begin{cases}x=C_1\cos t+C_2\sin t+C_3\cos 3t+C_4\sin 3t+\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{2}{15}\cos 2t,\\ y=2C_2\cos t-2C_1\sin t+2C_3\sin 3t-2C_4\cos 3t-\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{1}{15}\sin 2t.\end{cases}$$

12.9.26. $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(e^t-e^{-3t}),\\ y=-\frac{1}{2}(e^t-3e^{-3t}).\end{cases}$ 12.9.27. $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t.\end{cases}$

12.9.28. $\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(2+\sqrt{3})$ (s)，g 为重力加速度.

12.9.29. $y=C_1(2x+1)+C_2(2x+1)\ln(2x+1)$.

12.9.30. $y=C_0+(x+2)[C_1\cos\ln(x+2)+C_2\sin\ln(x+2)]$
$+x$.

12.9.31. $f(x)=C_1\left(\cos x+\frac{\sin(1)+1}{\cos 1}\sin x\right)$.

12.9.32. $y=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{6}e^{-3x}-xe^x$.

12.9.33. $\begin{cases}f(x)=-x-2,\\ \varphi(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-6;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)=1-x,\\ \varphi(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x.\end{cases}$

十（第 251 页）

12.10.1. $y=(a_0+1)\left\{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right\}-x-1$

或 $y=Ce^x-x-1$（其中 $C=a_0+1$）.

12.10.2. $y=a_0\left\{1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right\}+\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$ 或 $y=a_0e^{-x}+\operatorname{sh} x$.

12.10.3. $y=C_1\left[1-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}-\frac{2}{5}x^5-\cdots\right]+C_2\left[x-\frac{x^3}{3!}-\frac{2}{4!}x^4-\frac{5}{5!}x^5-\cdots\right]$.

12.10.4. $y=\frac{\pi}{2}+x+x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{120}x^5-\cdots$.

12.10.5. $y=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots$.

十一（第 251 页）

12.11.1. $xyy'^2+y'(x^2-y^2-C^2)=xy$.

12.11.2. $\tan y=C(1-e^x)^3$.

12.11.3. $\frac{1}{x^2}=2+Cy^2$.

12.11.4. $4(x^2+y)^3=(2x^3+3xy+C)^2$.

12.11.5. $e^{10y-20x}=C(5x+10y+7)^2$.

12.11.6. $y=\ln(1+Ce^{-e^x})$.

12.11.7. $y^2=C\csc^2 x+\frac{2}{3}\sin x$.

12.11.8. $\cos y=Ce^x-(x+1)$.

12.11.9. $y=x+(Ce^{\frac{x^2}{2}}-x^2-2)^{-1}$.

12.11.10. $2\ln|y|-\frac{y^2}{x}=C$.　　12.11.11. $y=\frac{1+x}{1-x}$.

12.11.12. $y\cos x=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\pi}{2}-1$.

12.11.13. $y=2-2e^{\frac{x^2}{2}}$.　　　12.11.14. $y=Cx-x\ln|x|$.

12.11.15. $\frac{a+bh}{a-bh}=e^{2abt}\left(其中 a=\sqrt{0.21}, b=\frac{1}{20}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$.

12.11.16. $xy=2a^2(x>0)$.

12.11.17. $v(t)=\frac{mg}{k_1}(\sin\alpha-k_2\cos\alpha)(1-e^{-\frac{k_1}{m}t})(0\leqslant t\leqslant T$, T 为物体滑到斜面底部的时间，g 为重力加速度).

12.11.18. $y=-\frac{1}{2}(x+C_1)^2-C_1^2\ln|x-C_1|+C_2$.

12.11.19. $\pm 2a^{\frac{1}{4}}\left[(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}}-3C_1(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{1}{2}}\right]$
$=3x+C_2$.

12.11.20. $\pm\sqrt{C_1}\left[\sqrt{2C_1y-y^2}+C_1\arcsin\left(1-\frac{y}{C_1}\right)\right]$
$=ax+C_2$.

或 $\pm\sqrt{C_1}\left(\sqrt{y^2+2C_1y}-C_1\ln|y+C_1+\right.$
$\left.\sqrt{y^2+2C_1y}|\right)=ax+C_2$.

12.11.21. $v_0=\sqrt{2\times 9.81\times 6.370\times 10^6}$
$\approx 11.179\times 10^3(\mathrm{m/s})$.

12.11.22. $t=\sqrt{\frac{m}{kg}}\arctan\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0\right)$, g 为重力加速度.

12.11.23. $y=5(x-1)^2$.　　　12.11.24. $f(x)=\sqrt{x}$.

12.11.25. $x(t)=a\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}t\right)$, g 为重力加速度.

12.11.26. $\theta=A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)+B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$, $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, g 为重力加速度.

12.11.27. (1) $i(t)=\frac{E_0}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$;

(2) $i(t)=\frac{LE_0}{R^2+L^2\omega^2}\left[\frac{R}{L}\sin\omega t-\omega\cos\omega t\right]$.

12.11.28. $i_2(t)=Ae^{-\tau t}$,其中 $\tau=\frac{1}{C(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)}$,

$$A=\frac{R_2E}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}.$$

12.11.29. $y=3\sqrt{x}$.

12.11.30. $y(x)=\begin{cases} e^{-x}+x-1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ (1-2e)e^{-x}+2, & 1<x<+\infty. \end{cases}$

12.11.31. $1497.2(m^3/min)$. 12.11.32. $f(x)=e^x$.

12.11.33. $f(x)=\frac{1}{2-x}-\frac{1}{3}(x-2)^3+C$.

12.11.34. $y=\frac{y_0e^{x^2}}{2y_0x+1}$. 12.11.35. $\frac{x+y}{x-y}e^{x+y}=C$.

12.11.36. $f(x)=2+Cx$. 12.11.37. $400(3-e^{-2})(g)$.

12.11.39. $y=\frac{1}{2}[e^{(x-1)}+e^{-(x-1)}]$.

12.11.40. $f(r)=-\frac{1}{r}+2$.

12.11.41. $\frac{d^2x}{dy^2}-x=e^{2y}$; $x=C_1e^y+C_2e^{-y}+\frac{1}{3}e^{2y}$.

12.11.42. $f(x)=-3+\frac{11}{3}e^{-\frac{x}{2}}+2x+\frac{1}{3}e^x$.

12.11.43. $y=-\frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}}+\frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}}+\frac{5}{24}$.

12.11.45. $f'(x)-f(x)=2e^x$; $f(x)=2xe^x$.

12.11.46. $y=(C_1\tan x+C_2)e^{-\tan x}+\tan x-2$.

附　　录

I. 希腊字母

字母		读音	字母		读音
Α	α	Alpha	Ν	ν	Nu
Β	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	Ο	o	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
Ε	ε	Epsilon	Ρ	ρ	Rho
Ζ	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
Η	η	Eta	Τ	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
Ι	ι	Iota	Φ	φ	Phi
Κ	κ	Kappa	Χ	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
Μ	μ	Mu	Ω	ω	Omega

II. 代　　数

1. 指数和对数运算

$a^x a^y = a^{x+y}$，$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$，$(a^x)^y = a^{xy}$，$\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$.

$\log_a 1 = 0$，$\log_a a = 1$，$\log(N_1 \cdot N_2) = \log N_1 + \log N_2$，

$\log \dfrac{N_1}{N_2} = \log N_1 - \log N_2$，$\log(N^n) = n\log N$，

$\log \sqrt[n]{N}=\frac{1}{n}\log N$, $\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$.

$e\approx 2.7183$,

$\lg e\approx 0.4343$, $\ln 10\approx 2.3026$.

2. 有限项数项级数

(1) $1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

(2) $p+(p+1)+(p+2)+\cdots+(n-1)+n$

$$=\frac{(n+p)(n-p+1)}{2};$$

(3) $1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$;

(4) $2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n=n(n+1)$;

(5) $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(6) $1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

(7) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$;

(8) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

(9) $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+\overline{n-1}d)$

$$=n\left(a+\frac{n-1}{2}d\right);$$

(10) $a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=a\,\frac{1-q^n}{1-q}\ (q\neq 1)$.

3. 牛顿公式

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m+\cdots+nab^{n-1}+b^n.$$

$$(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+$$
$$\cdots+(-1)^m\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m+\cdots+(-1)^nb^n.$$

4. 因式分解公式

$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$；

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$；

$(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$；

$(x\pm y)^n$ 按“牛顿公式”展开；

$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$；

$$(x^n-y^n)\div(x-y)$$
$$=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1};$$

$$(x^n+y^n)\div(x+y)$$
$$=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1}\text{（}n\text{ 是奇数）}.$$

$$(x^n-y^n)\div(x+y)$$
$$=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1}\text{（}n\text{ 是偶数）}.$$

III. 三　　角

1. 基本公式

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha,$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha,$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha},$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$$

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha,$$

2. 约化公式

函　数	$\beta=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=\pi\pm\alpha$	$\beta=\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$	$\beta=2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\tan\beta$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$\cot\beta$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

3. 和差公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)],$$

$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)],$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A-B)+\sin(A+B)].$$

4. 倍角和半角公式

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},$$

$$\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot \alpha},$$

$$\sin \frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}},$$

$$\tan \frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}},$$

$$\cot \frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}}.$$

5. 任意三角形的基本关系

(1) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.（正弦定理）

(2) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.（余弦定理）

(3) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$.（正切定理）

(4) $S=\frac{1}{2}ab\sin C$.（面积公式）

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

6. 双曲函数和反双曲函数

(1) $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,

$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,

$\operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,

$\operatorname{coth} x=\frac{1}{\operatorname{th} x}$.

$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\operatorname{ch} x}$,

$\operatorname{csch} x=\frac{1}{\operatorname{sh} x}$,

(2) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$,

$\coth^2x-\mathrm{csch}^2x=1$,

$\mathrm{sech}^2x+\mathrm{th}^2x=1$,

$\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\mathrm{th}x$,

$\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}=\coth x$.

(3) $\mathrm{Arsh}\ x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,

$\mathrm{Arch}\ x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})\quad(x\geqslant1)$,

$\mathrm{Arth}\ x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\quad(|x|<1)$,

$\mathrm{Arcoth}\ x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}\quad(|x|>1)$.

Ⅳ. 初 等 几 何

在下列公式中，字母 R，r 表示半径，h 表示高，l 表示斜高.

1. 圆；圆扇形

圆：周长$=2\pi r$； 面积$=\pi r^2$.

圆扇形：面积$=\dfrac{1}{2}r^2\alpha$（式中 α 为扇形的圆心角，以弧度计）.

2. 正圆锥

体积$=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$；侧面积$=\pi rl$；全面积$=\pi r(r+l)$.

3. 截圆锥

体积$=\dfrac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)$； 侧面积$=\pi l(R+r)$.

4. 球

体积$=\dfrac{4}{3}\pi r^3$； 面积$=4\pi r^2$.

V. 导数和微分

1. 基本公式

$(c)'=0$,

$(x)'=1$,

$(x^n)'=nx^{n-1}$,

$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$,

$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{n}{x^{n+1}}$,

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

$(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$,

$(e^x)'=e^x$,

$(a^x)'=a^x\ln a$,

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$,

$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$,

$(\lg x)'=\frac{1}{x}\lg e\approx\frac{0.4343}{x}$,

$(\sin x)'=\cos x$,

$(\cos x)'=-\sin x$,

$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$,

$(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$,

$(\sec x)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x\sec x$,

$(\csc x)'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\cot x\csc x$,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arcsec} x)'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$(\operatorname{arccsc} x)'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x.$$

$$(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{coth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$

$$(\operatorname{Arsh} x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$(\operatorname{Arch} x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$(\operatorname{Arth} x)'=\frac{1}{1-x^2},$$

$$(\operatorname{Arcoth} x)'=-\frac{1}{x^2-1}.$$

2. 运算法则

$$(cu)'=cu',$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v',$$

$$(uv)'=uv'+vu',$$

$$(uvw)'=uvw'+uwv'+vwu',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2},$$

$f'_x[\varphi(x)]=f'(u)\cdot\varphi'(x)$

$\mathrm{d}(cu)=c\mathrm{d}u$,

$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$,

$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$.

$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$.

Ⅵ. 不定积分

1. 基本积分公式

$$\int 0\cdot\mathrm{d}x=C,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C,$$

$$\int x^n\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\quad(n\neq-1),$$

$$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C,$$

$$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C,$$

$$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C,$$

$$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C,$$

$$\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C,$$

$$\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}=\tan x+C,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x}=-\cot x+C,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \mathrm{Arch}\,\frac{x}{a} + C = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C,$$

$$\int \mathrm{sh}\,x dx = \mathrm{ch}\,x + C,$$

$$\int \mathrm{ch}\,x dx = \mathrm{sh}\,x + C,$$

$$\int \mathrm{th}\,x dx = \ln \mathrm{ch}\,x + C,$$

$$\int \mathrm{coth}\,x dx = \ln|\mathrm{sh}\,x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\,x + C,$$

2. 积分运算

$$\int [f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx,$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx \qquad (a \neq 0, a \text{ 是常数}),$$

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx,$$

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

3. 积分表

（一）含有 $ax+b$ 的积分

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

2. $\int (ax+b)^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{1}{a(\mu+1)}(ax+b)^{\mu+1} + C(\mu \neq -1)$

3. $\int \frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}(ax+b-b\ln|ax+b|) + C$

4. $\int \frac{x^2}{ax+b}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}(ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2\ln|ax+b|\right] + C$$

5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

7. $\int \frac{x}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right) + C$

8. $\int \frac{x^2}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{a^3}\left(ax+b-2b\ln|ax+b| - \frac{b^2}{ax+b}\right) + C$$

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

（二）含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分

10. $\int \sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3} + C$

11. $\int x\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3} + C$

12. $\int x^2\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{2}{105a^3}(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)\sqrt{(ax+b)^3} + C$$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}+C$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x =$

$\frac{2}{15a^3}(3a^2x^2-4abx+8b^2)\sqrt{ax+b}+C$

15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} =$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+C & (b>0) \\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+C & (b<0) \end{cases}$$

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx}-\frac{a}{2b}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

17. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\mathrm{d}x = 2\sqrt{ax+b}+b\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

18. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x}+\frac{a}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

（三）含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分

19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} =$

$\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

21. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

（四）含有 $ax^2+b(a>0)$ 的积分

22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b} =$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\dfrac{a}{b}}x + C & (b > 0) \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a}\,x - \sqrt{-b}}{\sqrt{a}\,x + \sqrt{-b}}\right| + C & (b < 0) \end{cases}$$

23. $\displaystyle\int \frac{x}{ax^2 + b}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln|ax^2 + b| + C$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2}{ax^2 + b}\mathrm{d}x = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + b}$

25. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax^2 + b)} = \frac{1}{2b}\ln\frac{x^2}{|ax^2 + b|} + C$

26. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax^2 + b)} = -\frac{1}{bx} - \frac{a}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + b}$

27. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(ax^2 + b)} = \frac{a}{2b^2}\ln\frac{|ax^2 + b|}{x^2} - \frac{1}{2bx^2} + C$

28. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2 + b)^2} = \frac{x}{2b(ax^2 + b)} + \frac{1}{2b}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + b}$

（五）含有 $ax^2+bx+c(a>0)$ 的积分

29. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c} =$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac - b^2}}\arctan\dfrac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C & (b^2 < 4ac) \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right| + C & (b^2 > 4ac) \end{cases}$$

30. $\displaystyle\int \frac{x}{ax^2 + bx + c}\mathrm{d}x =$

$$\frac{1}{2a}\ln|ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c}$$

（六）含有 $\sqrt{x^2+a^2}(a>0)$ 的积分

31. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C_1 = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$

33. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2+a^2} + C$

34. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$

35. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx =$

$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

36. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}dx =$

$-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C$

38. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$

39. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx =$

$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

40. $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}$

$+ \frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

41. $\int x\sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3} + C$

42. $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}dx =$

$\frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

43. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2} + a\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C$

44. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

（七）含有 $\sqrt{x^2-a^2}(a>0)$ 的积分

45. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} =$

$\frac{x}{|x|}\operatorname{arch}\frac{|x|}{a} + C_1 = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

46. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$

47. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-a^2} + C$

48. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} + C$

49. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

50. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}\mathrm{d}x = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

51. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|} + C$

52. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$

53. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x =$

$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

54. $\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3}{8}a^4\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

55. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3} + C$

56. $\int x^2 \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x =$

$$\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

57. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C$

58. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

（八）含有 $\sqrt{a^2-x^2}(a>0)$ 的积分

59. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$

60. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$

61. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = -\sqrt{a^2-x^2}+C$

62. $\int \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$

63. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

64. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

65. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

66. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$

67. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

68. $\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}$

$$+\frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a}+C$$

69. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+C$

70. $\int x^2 \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

71. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{a^2-x^2}+a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

72. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

（九）含有 $\sqrt{\pm ax^2+bx+c}\,(a>0)$ 的积分

73. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b$

$$+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|+C$$

74. $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}$

$$+\frac{4ac-b^2}{8\sqrt{a^3}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|+C$$

75. $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}$

$$-\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|+C$$

76. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c+bx-ax^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

77. $\int \sqrt{c+bx-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2ax-b}{4a}\sqrt{c+bx-ax^2}$

$$+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$$

78. $\int \frac{x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\sqrt{c+bx-ax^2}$

$$+\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$$

（十）含有$\sqrt{\pm\frac{x-a}{x-b}}$或$\sqrt{(x-a)(b-x)}$的积分

79. $\int\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\mathrm{d}x=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}+(b-a)\ln(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x-b|})+C$

80. $\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\mathrm{d}x=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$

81. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C\quad(a<b)$

82. $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C\quad(a<b)$$

（十一）含有三角函数的积分

83. $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

84. $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

85. $\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$

86. $\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$

87. $\int\sec x\mathrm{d}x=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C$

88. $\int\csc x\mathrm{d}x=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C=\ln|\csc x-\cot x|+C$

89. $\int\sec^2x\mathrm{d}x=\tan x+C$

90. $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$

91. $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$

92. $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$

93. $\int \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

94. $\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

95. $\int \sin^n x \mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x \mathrm{d}x$

96. $\int \cos^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x \mathrm{d}x$

97. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2}x}$

98. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2}x}$

99. $$\begin{aligned}\int \cos^m x \sin^n x \mathrm{d}x &= \frac{1}{m+n}\cos^{m-1}x \sin^{n+1}x \\ &\quad + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x \sin^n x \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1}x \sin^{n-1}x \\ &\quad + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2}x \mathrm{d}x\end{aligned}$$

100. $$\begin{aligned}\int \sin ax \cos bx \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x \\ &\quad - \frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x + C\end{aligned}$$

101. $$\begin{aligned}\int \sin ax \sin bx \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x \\ &\quad + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C\end{aligned}$$

102. $\int \cos ax \cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x$

$$+\frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x+C$$

103. $\int\frac{dx}{a+b\sin x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}+C \quad (a^2>b^2)$

104. $\int\frac{dx}{a+b\sin x}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right|+C \quad (a^2<b^2)$

105. $\int\frac{dx}{a+b\cos x}=$

$$\frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C \quad (a^2>b^2)$$

106. $\int\frac{dx}{a+b\cos x}=$

$$\frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}\right|+C \qquad (a^2<b^2)$$

107. $\int\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan x\right)+C$

108. $\int\frac{dx}{a^2\cos^2x-b^2\sin^2x}=\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b\tan x+a}{b\tan x-a}\right|+C$

109. $\int x\sin ax\,dx=\frac{1}{a^2}\sin ax-\frac{1}{a}x\cos ax+C$

110. $\int x^2\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}x^2\cos ax+\frac{2}{a^2}x\sin ax+\frac{2}{a^3}\cos ax+C$

111. $\int x\cos ax\,dx=\frac{1}{a^2}\cos ax+\frac{1}{a}x\sin ax+C$

112. $\int x^2\cos ax\,dx=\frac{1}{a}x^2\sin ax+\frac{2}{a^2}x\cos ax$

$$-\frac{2}{a^3}\sin ax+C$$

（十二）含有反三角函数的积分（其中 $a>0$）

113. $\int \arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}+C$

114. $\int x\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a}$
$$+\frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

115. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a}$
$$+\frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}+C$$

116. $\int \arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}+C$

117. $\int x\arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a}$
$$-\frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

118. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a}$
$$-\frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}+C$$

119. $\int \arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C$

120. $\int x\arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(a^2+x^2)\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}x+C$

121. $\int x^2\arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{6}x^2$
$$+\frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2)+C$$

（十三）含有指数函数的积分

122. $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x+C$

123. $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

124. $\int xe^{ax}dx = \frac{1}{a^2}(ax - 1)e^{ax} + C$

125. $\int x^n e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$

126. $\int xa^x dx = \frac{x}{\ln a}a^x - \frac{1}{(\ln a)^2}a^x + C$

127. $\int x^n a^x dx = \frac{1}{\ln a}x^n a^x - \frac{n}{\ln a}\int x^{n-1}a^x dx$

128. $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$

129. $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx) + C$

130. $$\int e^{ax}\sin^n bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2n^2}e^{ax}\sin^{n-1}bx(a\sin bx - nb\cos bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + b^2n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bx dx$$

131. $$\int e^{ax}\cos^n bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2n^2}e^{ax}\cos^{n-1}bx(a\cos bx + nb\sin bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + b^2n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx dx$$

（十四）含有对数函数的积分

132. $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$

133. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C$

134. $\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$

135. $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}dx$

136. $$\int x^m(\ln x)^n dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}dx$$

（十五）含有双曲函数的积分

137. $\int \operatorname{sh} x\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$

138. $\int \operatorname{ch} x\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$

139. $\int \operatorname{th} x\mathrm{d}x = \ln \operatorname{ch} x + C$

140. $\int \operatorname{sh}^2 x\mathrm{d}x = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + C$

141. $\int \operatorname{ch}^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + C$

（十六）定　积　分

142. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x = 0$

143. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\mathrm{d}x = 0$

144. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \pi, m = n \end{cases}$

145. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \pi, m = n \end{cases}$

146. $\int_{0}^{\pi} \sin mx \sin nx\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} \cos mx \cos nx\mathrm{d}x$

$$= \begin{cases} 0, m \neq n \\ \pi/2, m = n \end{cases}$$

147. $I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots\cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}（n \text{ 为大于 1 的正奇数}）, \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots\cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}（n \text{ 为正偶数}）, I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1 \end{cases}$$

VII．初等函数的幂级数展开式

(1) $(1\pm x)^m=1\pm mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2\pm\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3$

$+\cdots+(\pm1)^n\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$

$|x|\leqslant1,\quad m>0.$

(2) $(1\pm x)^{-m}=$

$=1\mp mx+\frac{m(m+1)}{2!}x^2\mp\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3$

$+\cdots+(\mp1)^n\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}x^n+\cdots,$

$|x|<1,\quad m>0.$

(3) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$

$|x|<\infty.$

(4) $\sin(x+a)=$

$=\sin a+x\cos a-\frac{x^2\sin a}{2!}-\frac{x^3\cos a}{3!}$

$+\frac{x^4\sin a}{4!}+\cdots+\frac{x^n\sin\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}+\cdots,\qquad|x|<\infty.$

(5) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$

$|x|<\infty.$

(6) $\cos(x+a)=$

$=\cos a-x\sin a-\frac{x^2\cos a}{2!}+\frac{x^3\sin a}{3!}+\frac{x^4\cos a}{4!}$

$-\cdots+\frac{x^n\cos\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}+\cdots,\qquad|x|<\infty.$

(7) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\qquad|x|<\infty.$

(8) $a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + \frac{(x\ln a)^3}{3!}$

$+\cdots+\frac{(x\ln a)^n}{n!}+\cdots,\qquad |x|<\infty.$

(9) $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$

$+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\cdots,\qquad 0<x\leqslant 2.$

(10) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

$+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\qquad -1<x\leqslant 1.$

(11) $\ln(1-x) = -\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right],$

$-1\leqslant x<1.$

(12) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right],$

$|x|<1.$

(13) $\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} +$

$\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+1)}+\cdots,\qquad |x|\leqslant 1.$

(14) $\arccos x =$

$\frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} +\right.$

$\left.\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+1)}+\cdots\right],\qquad |x|\leqslant 1.$

(15) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} +$

$\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\qquad |x|\leqslant 1.$

(16) $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\right.$

$\left.+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right],\qquad |x|\leqslant 1.$

(17) $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \qquad |x| < \infty.$

(18) $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad |x| < \infty.$

(19) $\operatorname{arsh} x = x - \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+1)} x^{2n+1} + \cdots, \qquad |x| \leqslant 1.$

(20) $\operatorname{arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \qquad |x| < 1.$

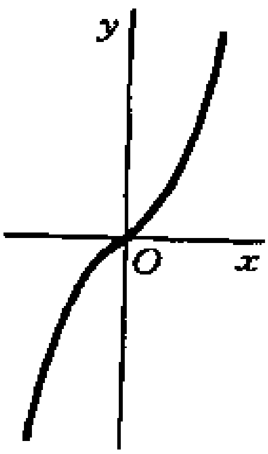
(21) 欧拉公式

$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$

或 $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$

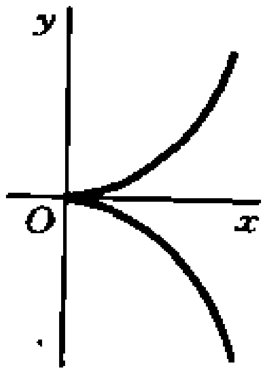
VIII. 几种常用的曲线

(1)三次抛物线



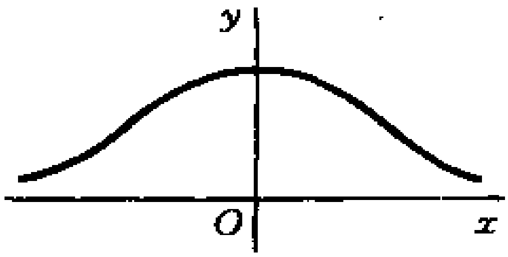
$y=ax^3$.

(2)半立方抛物线



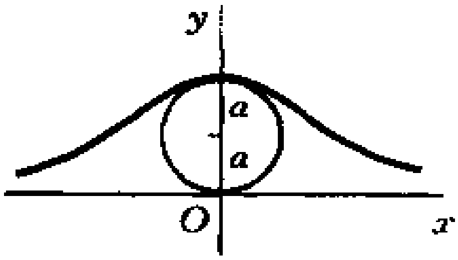
$y^2=ax^3$.

(3)概率曲线



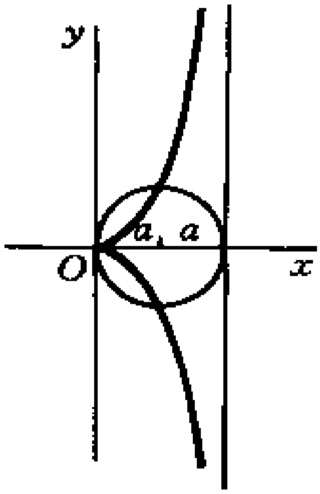
$y=e^{-x^2}$.

(4)箕舌线



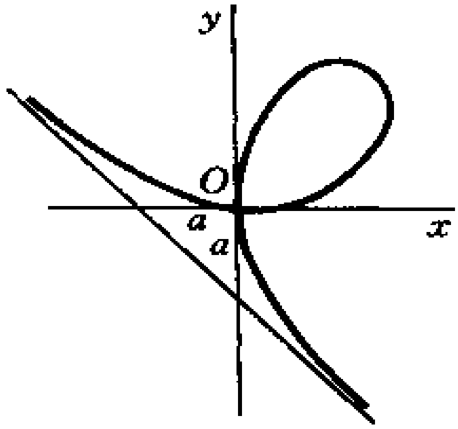
$y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

(5)蔓叶线



$y^2(2a-x)=x^3$.

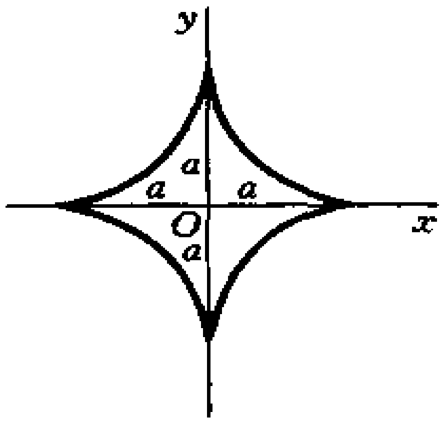
(6)笛卡儿叶形线



$x^3+y^3-3axy=0$,

$x=\frac{3at}{1+t^3}, y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

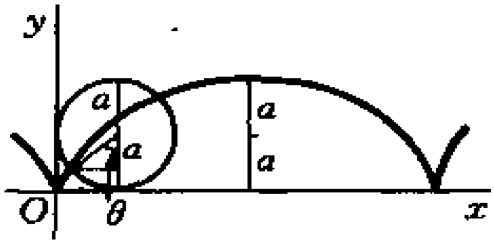
(7)星形线(内摆线的一种)



$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$,

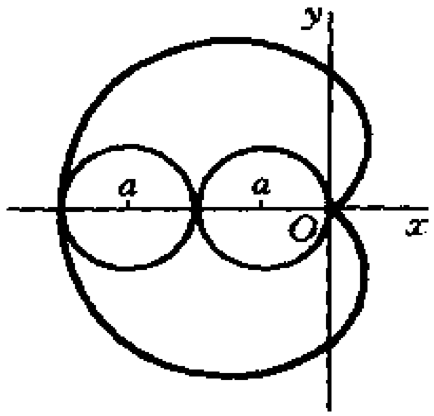
$\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta. \end{cases}$

(8)摆线



$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta). \end{cases}$

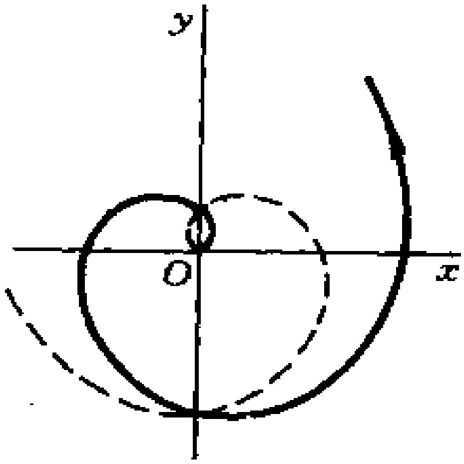
(9)心形线(外摆线的一种)



$x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$,

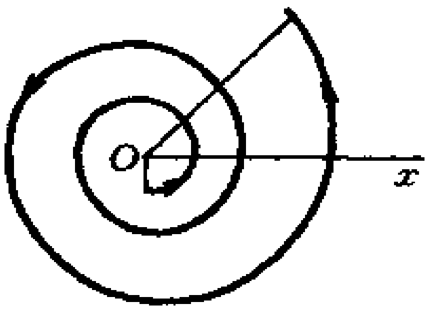
$r=a(1-\cos\theta)$.

(10)阿基米德螺线



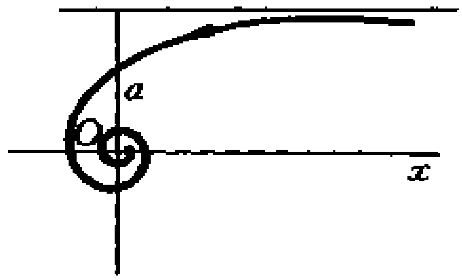
$r=a\theta$.

(11)对数螺线



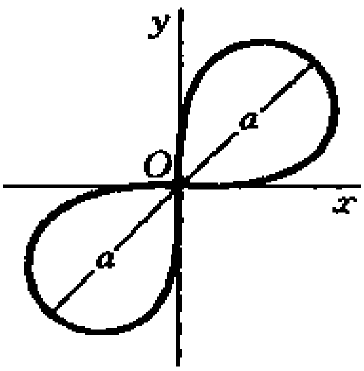
$r=e^{a\theta}$.

(12)双曲螺线



$r\theta=a$.

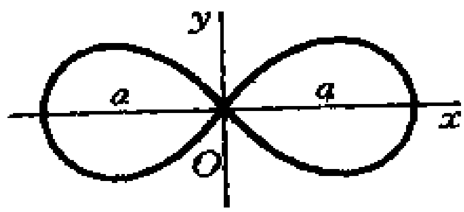
(13)伯努利双纽线



$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$,

$r^2=a^2\sin 2\theta$.

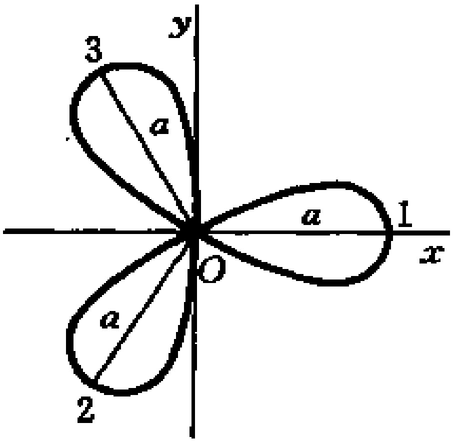
(14)伯努利双纽线



$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$,

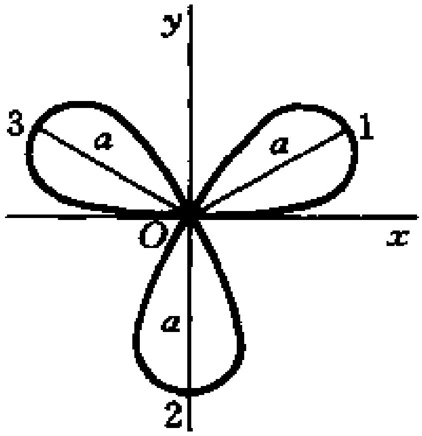
$r^2=a^2\cos 2\theta$.

(15)三叶玫瑰线



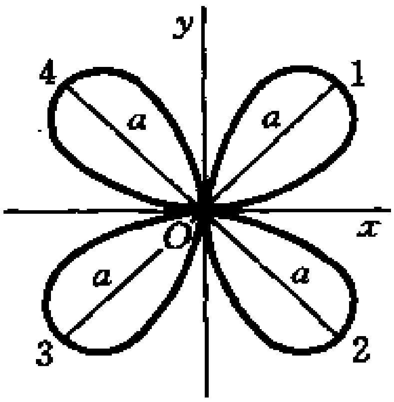
$r=a\cos 3\theta$.

(16)三叶玫瑰线



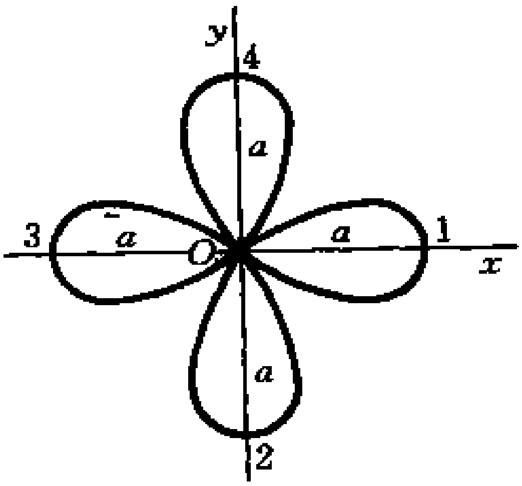
$r=a\sin 3\theta$.

(17)四叶玫瑰线



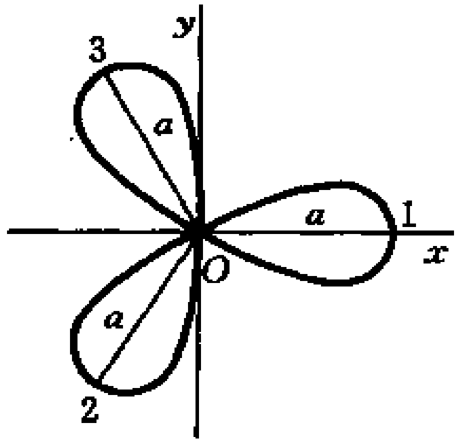
$r=a\sin 2\theta$.

(18)四叶玫瑰线



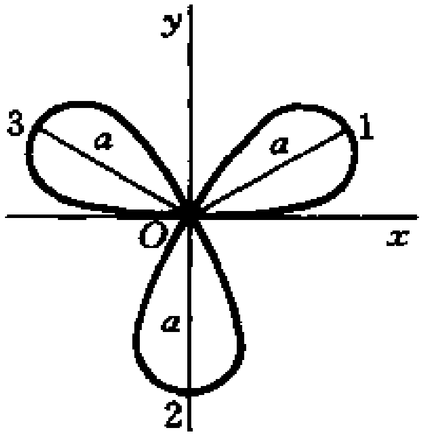
$r=a\cos 2\theta$.

(15)三叶玫瑰线



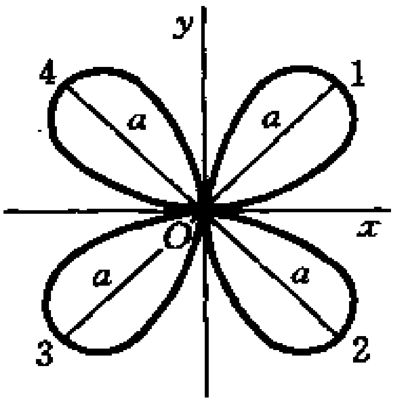
$r = a\cos 3\theta$.

(16)三叶玫瑰线



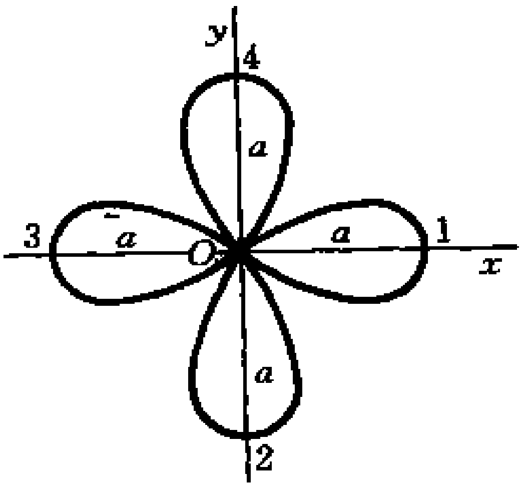
$r = a\sin 3\theta$.

(17)四叶玫瑰线



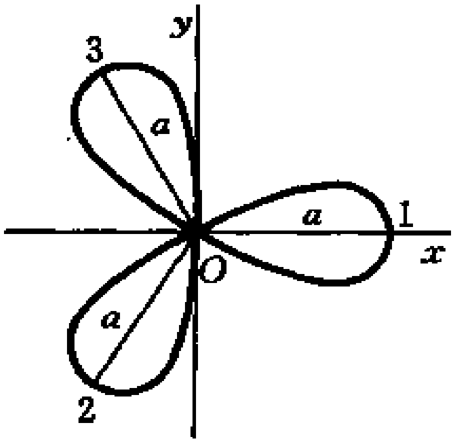
$r = a\sin 2\theta$.

(18)四叶玫瑰线



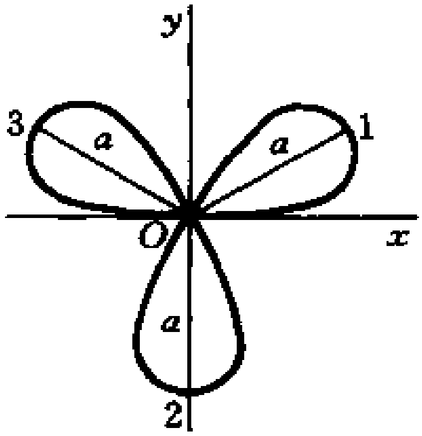
$r = a\cos 2\theta$.

(15)三叶玫瑰线



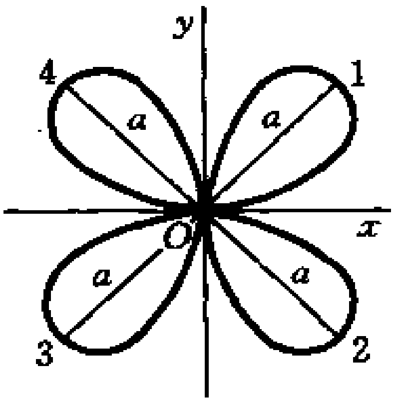
$r=a\cos 3\theta$.

(16)三叶玫瑰线



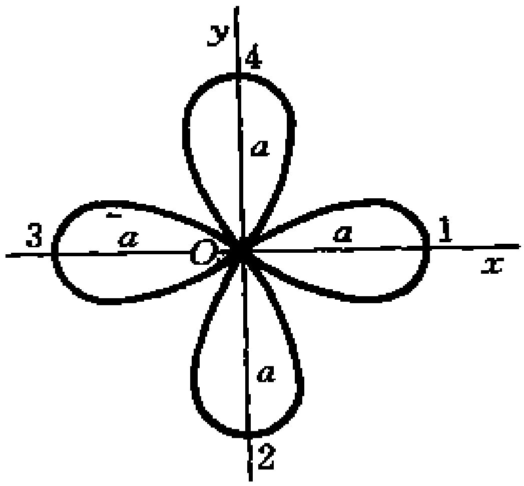
$r=a\sin 3\theta$.

(17)四叶玫瑰线



$r=a\sin 2\theta$.

(18)四叶玫瑰线



$r=a\cos 2\theta$.

1996 年修订本

高等数学习题集

同济大学应用数学系

ISBN 7-04-006400-6

9 787040 064001 >

定价 12.70 元